COHOMOLOGIE DES COURBES ANALYTIQUES p-ADIQUES

par

Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu & Wiesława Nizioł

À la mémoire de Robert Coleman et Michel Raynaud

Résumé. — La cohomologie d'un affinoïde a des propriétés peu sympathiques ; on y remédie en général en rendant l'affinoïde surconvergent. Dans cet article, nous nous intéressons à la dimension 1, et nous calculons, en utilisant des décompositions analogues à celles des surfaces de Riemann en pantalons, les différentes cohomologies des affinoïdes (pour donner un sens à ces décompositions, nous sommes amenés à modifier légèrement la notion de schéma formel p-adique, ce qui nous conduit à définir la géométrie adoque – interpolation entre adique et ad hoc). Il en résulte que la cohomologie d'un affinoïde (de dimension 1) n'est pas si pathologique.

Nous en déduisons un calcul des différentes cohomologies des courbes sans bord (comme le demi-plan de Drinfeld et ses revêtements), et obtenons en particulier une description de leur cohomologie proétale p-adique en termes du complexe de de Rham et de la cohomologie de Hyodo-Kato, cette dernière ayant des propriétés similaires à celles de la cohomologie proétale ℓ-adique, pour $\ell \neq p$.

Abstract. — Cohomology of affinoids does not behave well; often, this can be remedied by making affinoids overconvergent. In this paper, we focus on dimension 1 and compute, using analogs of pants decompositions of Riemann surfaces, various cohomologies of affinoids. To give a meaning to these decompositions we modify slightly the notion of p-adic formal scheme, which gives rise to the adoc (an interpolation between adic and ad hoc) geometry. It turns out that cohomology of affinoids (in dimension 1) is not that pathological.

From this we deduce a computation of cohomologies of curves without boundary (like the Drinfeld half-plane and its coverings). In particular, we obtain a description of their p-adic proétale cohomology in terms of de the Rham complex and the Hyodo-Kato cohomology, the later having properties similar to the ones of ℓ-adic pro-étale cohomology, for $\ell \neq p$.

Table des matières

Introduction 3
0.1. Cohomologie proétale p-adique 3
0.2. Description combinatoire des diverses cohomologies 6
0.3. Preuves 11
0.4. Quelques notations et définitions 14
1. Cohomologie des graphes 15
1.1. Graphes 16
1.2. Cohomologie 17

2. Courbes analytiques 19
2.1. Structure globale d'une courbe 20
2.2. Affinoïdes 20
2.3. Modèles semi-stables des courbes analytiques 22
2.4. Fibre spéciale d'une courbe quasi-compacte 25
2.5. Métrique canonique et valuation 27
3. Construction de courbes analytiques 28
3.1. Géométrie adoque 29
3.2. R-algèbres de Tate 33
3.3. Shorts, jambes et cercles fantômes 35
3.4. Compactification d'un affinoïde 38
3.5. Patron d'une courbe 39
3.6. Construction de courbes à partir d'un patron 40
3.7. Cohomologie de de Rham adoque 44
4. Cohomologie des boules, des jambes et des cercles fantômes 46
4.1. Symboles ℓ-adiques 46
4.2. Régulateur syntomique 48
4.3. Dégénérescence de couronnes 53
5. Cohomologie des shorts 55
5.1. Cohomologie étale des courbes quasi-compactes 55
5.2. Cohomologie syntomique 59
5.3. Symboles et formes différentielles 62
5.4. Comparaison syntomique-étale pour les petits shorts 66
6. Cohomologie des courbes quasi-compactes 71
6.1. Notations 72
6.2. Cohomologie étale 72
6.3. Cohomologie de de Rham et variantes 75
6.4. Cohomologie syntomique et cohomologie étale p-adique 83
7. Affinoïdes surconvergents 89
7.1. Cohomologie d'un affinoïde surconvergent 89
7.2. Comparaison avec l'intégration p-adique 95
8. Cohomologie des courbes non propres, sans bord 99
8.1. Cohomologie proétale p-adique 99
8.2. Fibre spéciale d'une courbe sans bord 100
8.3. Cohomologie (pro)étale ℓ-adique 104
8.4. Une décomposition de la cohomologie de de Rham 106
Appendice A. Plaidoyer pour un peu de modération 113
A.1. Groupe de Picard 113
A.2. Cohomologie étale 116
A.3. Cohomologie syntomique et cohomologie du groupe fondamental 116
A.4. La fibre générique adoque 117
Références 119

Introduction

Soit p un nombre premier et soit C un corps algébriquement clos, complet pour une valuation v_p vérifiant $v_p(p) = 1$ et [1] $v_p(C^*) = \mathbb{Q}$. On note $\mathscr{O}_C$ l'anneau des entiers de C, $\mathfrak{m}_C$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_C$, k_C son corps résiduel, $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ l'anneau $W(k_C)$ et $\breve{C}$ le sous-corps $W(k_C)[\frac{1}{p}]$ de C.

Si K est un sous-corps fermé de C, on note G_K le groupe $\mathrm{Aut}_K(C)$ des automorphismes continus de C laissant fixe K.

0.1. Cohomologie proétale p-adique

Soit X une courbe analytique définie sur C (vue, selon le contexte comme une courbe rigide analytique, un espace de Berkovich de dimension 1, etc.) et, sauf mention explicite du contraire, lisse et (géométriquement) connexe. Si X est compacte [2], sa cohomologie a de bonnes propriétés : les groupes de cohomologies de de Rham $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ ou étale $H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_\ell(1))$, où ℓ est un nombre premier, sont de dimension finie, indépendante de la cohomologie considérée (et invariante par extension des scalaires de C à un surcorps avec les mêmes propriétés), sur le corps adéquat. De plus, on a des théorèmes de comparaison reliant ces différentes cohomologies.

Il n'en est pas de même si X est seulement quasi-compacte mais pas compacte (i.e un affinoïde [3]) : dans ce cas, $H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_\ell(1))$ est encore de dimension finie si $\ell \neq p$, mais $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ est un C-espace de dimension infinie non séparé, et $H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_p(1))$ est aussi de dimension infinie (et dépend de C). Nous nous proposons de montrer que, malgré ces pathologies apparentes, la cohomologie des affinoïdes (et, plus généralement, des courbes non compactes) a des propriétés raisonnables.

0.1.1. Courbes quasi-compactes. —

Si Y est une courbe quasi-compacte, notons $\mathscr{O}(Y)^{**}$ le sous-groupe des $f \in \mathscr{O}(Y)^*$ telles que $f - 1$ soit topologiquement nilpotente.

Théorème 0.1. — Si Y est un affinoïde, on a un diagramme commutatif fonctoriel de banachs [4]

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbb{Q}_p(1)) & \longrightarrow & (\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}})^{N=0, \varphi=p} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta \otimes \iota_{\mathrm{HK}}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \Omega^1(Y) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

1. Cette restriction est due au fait que nous avons choisi d'exprimer les résultats en termes de l'anneau B_{st} ; une formulation (un peu moins esthétique) qui n'utilise que $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ serait possible et elle permettrait de supprimer cette restriction.

2. Quel que soit le point de vue (rigide, Berkovich, etc.), une courbe compacte est, dans cet article, une courbe propre, et un affinoïde est quasi-compact mais pas compact.

3. Sauf mention du contraire, un affinoïde est, dans ce texte, de dimension 1, lisse et connexe.

4. Si M est un Z-module, on pose $\mathbb{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} M := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\varprojlim_n M/p^n M)$.

dans lequel la ligne du haut est exacte, celle du bas est un complexe, et toutes les flèches sont d'image fermée.

Remarque 0.2. — (i) Il y a un énoncé au niveau entier, cf. rem. 0.19.

(ii) Un affinoïde étant quasi-compact, on a $H^1_{\text{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) = H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$, pour tout ℓ (y compris $\ell = p$), cf. [43, cor. 3.17].

(iii) Le groupe de cohomologie de Hyodo-Kato $H^1_{\text{HK}}(Y)^{\text{sep}}$ est un $\breve{C}$-espace de dimension finie muni d'actions d'un frobenius semi-linéaire φ, d'un opérateur de monodromie N vérifiant $N\varphi = p\,\varphi N$, et d'un isomorphisme de Hyodo-Kato :

$$\iota_{\text{HK}} : C \otimes_{\breve{C}} H^1_{\text{HK}}(Y)^{\text{sep}} \cong H^1_{\text{dR}}(Y)^{\text{sep}},$$

où $H^1_{\text{dR}}(Y)^{\text{sep}}$ désigne le séparé de $H^1_{\text{dR}}(Y)$ (i.e. son quotient par l'adhérence de 0) : le groupe $H^1_{\text{dR}}(Y)$ est un C-espace de dimension infinie, non séparé, mais $H^1_{\text{dR}}(Y)^{\text{sep}}$ est de dimension finie.

(iv) La preuve du théorème utilise des méthodes syntomiques mais va plus loin : les méthodes syntomiques [47, 17] fournissent naturellement un diagramme commutatif à lignes exactes [5] :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y)/C & \longrightarrow & H^1_{\text{proet}}(Y, \mathbf{Q}_p(1)) & \longrightarrow & (\mathbf{B}^+_{\text{st}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{C}} H^1_{\text{HK}}(Y))^{N=0,\varphi=p} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta\otimes\iota_{\text{HK}}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y)/C & \longrightarrow & \Omega^1(Y) & \longrightarrow & H^1_{\text{dR}}(Y) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Par rapport au théorème, il y a deux différences sensibles :

• Le groupe $H^1_{\text{HK}}(Y)$ est, comme $H^1_{\text{dR}}(Y)$, de dimension infinie et non séparé (on a un isomorphisme $\iota_{\text{HK}} : C \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{C}} H^1_{\text{HK}}(Y) \cong H^1_{\text{dR}}(Y)$), alors que $H^1_{\text{HK}}(Y)^{\text{sep}}$ est séparé, de dimension finie, et se décrit simplement (th. 0.13) en termes d'une triangulation de Y.

• La flèche $\mathscr{O}(Y) \to \mathbf{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$ faisant commuter le diagramme évident est $f \mapsto \exp(f)$, mais l'image de $\mathscr{O}(Y)$ par $f \mapsto \exp(f)$ est $\mathbf{Q}_p \otimes \mathscr{O}(Y)^{**}$ qui est dense dans $\mathbf{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$ mais ne lui est pas égal car $\mathscr{O}(Y)^{**}$ n'est pas complet pour la topologie p-adique : par exemple, si Y est la boule unité (i.e. $\mathscr{O}(Y) = C\langle T\rangle$), alors $\prod_{n\geq 1}(1+p^{1/p^n}T)^{p^n}$ ne converge pas dans $C\langle T\rangle$ (mais converge dans $\mathscr{O}_C[[T]]$).

Remarque 0.3. — Si Y est un affinoïde de dimension d, et si $r \leq d$, le résultat ci-dessus suggère que l'on pourrait peut-être espérer une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} K^r_{\mathscr{M}}(Y)^{++} \to H^r_{\text{proet}}(Y, \mathbf{Q}_p(r)) \to (\mathbf{B}^+_{\text{st}} \otimes H^r_{\text{HK}}(Y)^{\text{sep}})^{N=0,\varphi=p^r} \to 0.$$

(Le groupe $K^r_{\mathscr{M}}(Y)^{++}$ est le sous-groupe du groupe de K-théorie de Milnor $K^r_{\mathscr{M}}(\mathscr{O}(Y))$ engendré par les symboles $(f_1, \dots, f_r)$, avec $f_i \in \mathscr{O}(Y)^{**}$. Notons que, puisque l'on ne

5. $H^1_{\text{HK}}(Y)$ est naturellement un quotient W_1/W_2 de $\breve{C}$-banachs et $\mathbf{B}^+_{\text{st}} = \mathbf{B}^+_{\text{cris}}[u]$ où $\mathbf{B}^+_{\text{cris}}$ est un $\breve{C}$-banach (et donc $\mathbf{B}^+_{\text{st}}$ est une limite inductive de $\breve{C}$-banachs). On définit $\mathbf{B}^+_{\text{st}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{C}} H^1_{\text{HK}}(Y)$ comme $(\mathbf{B}^+_{\text{st}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{C}} W_1)/(\mathbf{B}^+_{\text{st}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{C}} W_2)$ où $\mathbf{B}^+_{\text{st}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{C}} W_i := \mathbf{B}^+_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{B}^+_{\text{cris}}} (\mathbf{B}^+_{\text{cris}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{C}} W_i)$.

prend que des symboles d'éléments de $\mathscr{O}(Y)^{**}$, la relation de Steinberg disparait puisque $1-x \notin \mathscr{O}(Y)^{**}$ si $x \in \mathscr{O}(Y)^{**}$.)

Une des raisons de la forme du diagramme ci-dessus est que $H^1(Y,\mathscr{O})=0$. Si Y est compacte, $H^1(Y,\mathscr{O}) \neq 0$ si Y est de genre ≥ 1, mais $\mathrm{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} = 0$ et le diagramme prend la forme (classique, c'est un cas particulier du théorème de comparaison de Tsuji [47] ou même, dans ce cas, de Kato [34]) suivante :

Théorème 0.4. — Si Y est une courbe compacte, on a un diagramme commutatif fonctoriel, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1_{\text{proet}}(Y,\mathrm{Q}_p(1)) & \longrightarrow & (\mathrm{B}^+_{\text{st}} \otimes_{\breve{C}} H^1_{\text{HK}}(Y))^{N=0,\varphi=p} & \longrightarrow & H^1(Y,\mathscr{O}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta\otimes\iota_{\text{HK}}} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1(Y) & \longrightarrow & H^1_{\text{dR}}(Y) & \longrightarrow & H^1(Y,\mathscr{O}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De plus, $H^1_{\text{proet}}(Y,\mathrm{Q}_p(1))$ est un Q_p-espace de dimension finie.

0.1.2. Affinoïdes surconvergents. — Une manière standard de rendre la cohomologie de de Rham d'un affinoïde plus raisonnable est de le rendre surconvergent : sa cohomologie de de Rham devient de dimension finie (et topologiquement séparée). En écrivant un affinoïde surconvergent $Y^\dagger$ comme une limite projective d'affinoïdes Y_δ, pour $\delta > 0$, en utilisant la description du groupe $H^1_{\text{HK}}(Y_\delta)^{\text{sep}}$ du th. 0.13 ci-dessous, et en passant à la limite dans le th. 0.1, on obtient le résultat suivant.

Théorème 0.5. — Si $Y^\dagger$ est un affinoïde surconvergent, on a le diagramme commutatif fonctoriel d'espaces vectoriels topologiques suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y^\dagger)/C & \xrightarrow{\exp} & H^1_{\text{proet}}(Y^\dagger,\mathrm{Q}_p(1)) & \longrightarrow & (\mathrm{B}^+_{\text{st}} \otimes_{\breve{C}} H^1_{\text{HK}}(Y^\dagger))^{N=0,\varphi=p} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta\otimes\iota_{\text{HK}}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y^\dagger)/C & \xrightarrow{d} & \Omega^1(Y^\dagger) & \longrightarrow & H^1_{\text{dR}}(Y^\dagger) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes et toutes les flèches sont d'image fermée.

Remarque 0.6. — (i) Par définition, $H^1_{\text{proet}}(Y^\dagger,\mathrm{Q}_p(1)) = \varinjlim_\delta H^1_{\text{proet}}(Y_\delta,\mathrm{Q}_p(1))$, et $H^1_{\text{HK}}(Y^\dagger) = \varinjlim_\delta H^1_{\text{HK}}(Y_\delta)$ est un $\breve{C}$-espace de dimension finie muni d'actions d'un frobenius semi-linéaire φ et d'un opérateur de monodromie N, et d'un isomorphisme $\iota_{\text{HK}} : C \otimes_{\breve{C}} H^1_{\text{HK}}(Y^\dagger) \cong H^1_{\text{dR}}(Y^\dagger)$.

(ii) Comme $H^1_{\text{HK}}(Y^\dagger)$ est de dimension finie, $(\mathrm{B}^+_{\text{st}} \otimes H^1_{\text{HK}}(Y^\dagger))^{\varphi=p,N=0}$ est l'espace des C-points d'un espace de Banach-Colmez [13]. Comme $\mathscr{O}(Y^\dagger)$ est l'espace des sections globales d'un faisceau cohérent, on voit que la cohomologie étale géométrique d'un affinoïde surconvergent, bien que très grosse, est composée d'objets ayant des propriétés de finitude raisonnables.

(iii) Les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels topologiques $(\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{\check{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y^\dagger))^{N=0,\varphi=p}$ et $H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger)$ sont des banachs mais tous les autres espaces non nuls du diagramme sont des limites inductives de banachs.

0.1.3. Courbes sans bord. — Supposons maintenant que Y n'est pas compacte mais n'a pas de bord quand même [6] (courbe Stein) : par exemple, une courbe ouverte obtenue en retirant un nombre fini de disques fermés d'une courbe propre, ou un revêtement étale du demi-plan de Drinfeld. Dans ce cas, $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ n'est pas forcément de dimension finie, mais c'est un espace séparé, limite projective dénombrable d'espaces de dimension finie. Si $\ell \neq p$, alors $H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est aussi une limite projective dénombrable d'espaces séparés de dimension finie, mais ce n'est pas le cas si $\ell = p$.

Une telle courbe est une réunion croissante stricte d'affinoïdes ou, au choix, d'affinoïdes surconvergents, et on déduit du th. 0.1 (ou du th. 0.5) le résultat suivant qui fournit une preuve alternative au th. 4.12 de [16] en dimension 1.

Théorème 0.7. — Si Y est une courbe non compacte, sans bord, on a un diagramme commutatif fonctoriel de fréchets

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y)/C & \xrightarrow{\exp} & H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbf{Q}_p(1)) & \longrightarrow & (\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+ \mathbin{\widehat{\otimes}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y))^{N=0,\varphi=p} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta\otimes\iota_{\mathrm{HK}}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y)/C & \xrightarrow{d} & \Omega^1(Y) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{dR}}(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes et toutes les flèches sont d'image fermée.

Remarque 0.8. — (i) La principale différence avec le cas d'un affinoïde surconvergent est que $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)$ et $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ ne sont pas forcément de dimension finie, mais sont des limites projectives dénombrables d'espaces séparés de dimension finie (ce sont donc des fréchets, mais des fréchets un peu particuliers), cela explique les produits tensoriels complétés et l'isomorphisme de Hyodo-Kato $\iota_{\mathrm{HK}} : C \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\check{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ fait aussi intervenir un produit tensoriel complété. Les autres espaces sont des duaux de limites inductives compactes de banachs.

(ii) Si Y est un affinoïde surconvergent ou une courbe sans bord (compacte ou non), le noyau de $H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbf{Q}_p(1)) \to \Omega^1(Y)$ est isomorphe à $t\, H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\varphi=1}$, où $t \in (\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p}$ est le $2i\pi$ p-adique de Fontaine.

0.2. Description combinatoire des diverses cohomologies

Expliquons maintenant comment décrire les objets apparaissant dans les th. 0.1, 0.5 et 0.7 à partir de découpages en objets plus élémentaires. Ces découpages sont induits par la stratification naturelle de la fibre spéciale d'un modèle semi-stable sur $\mathscr{O}_C$ (ouverts de lissité des composantes irréductibles, et intersections de composantes irréductibles). Ils fournissent des recouvrements ouverts dont la combinatoire est particulièrement simple (l'intersection de trois ouverts est vide, l'intersection de deux ouverts est vide ou est un 👻 cercle fantôme 👻, et

6. Notons que rendre un affinoïde surconvergent est une manière de supprimer son bord.

chacun des ouverts est affine et a ❦ bonne réduction ❦), ce qui facilite les calculs à la Čech. Une des utilisations agréables de ces découpages est la trivialisation de la construction de l'isomorphisme de Hyodo-Kato (cette construction est, en général, assez pénible).

0.2.1. Découpage en shorts et jambes. — Soit Y une courbe quasi-compacte. On dispose d'une bijection entre les triangulations S de Y et les modèles semi-stables de Y sur $\mathscr{O}_C$.

Choisissons donc une triangulation S et notons Y_S le modèle semi-stable de Y qui lui est associé. On suppose S assez fine pour que les composantes irréductibles de la fibre spéciale Y_S^{sp} soient lisses et deux d'entre elles s'intersectent en au plus un point. On voit Y_S^{sp} comme une courbe propre sur k_C munie d'un ensemble A de points marqués $a = (P_a, \mu(a))$, avec $A = A_c \sqcup (A \setminus A_c)$, où :

• A_c est l'ensemble des points singuliers (intersections de deux composantes irréductibles), pour lesquels $\mu(a) \in \mathbf{Q}_+^*$,

• si $a \in A \setminus A_c$, alors $\mu(a) = 0^+$ (les P_a, pour $a \in A \setminus A_c$, sont les points de Y_S^{sp} qu'il faut enlever pour obtenir la fibre spéciale au sens usuel).

Les composantes irréductibles de Y_S^{sp} (qui sont donc propres et lisses) sont en bijection avec S (on note Y_s^{sp} la composante correspondant à $s \in S$).

A partir de ces données, on fabrique un graphe Γ, dont les sommets sont S, les arêtes sont A, chaque arête a ayant pour longueur $\mu(a)$ et comme extrémités les $s \in S$ tels que $P_a \in Y_s^{\mathrm{sp}}$ (et donc $a \in A_c$ a deux extrémités alors que $a \in A \setminus A_c$ a une seule extrémité). Le graphe ainsi obtenu est donc le graphe dual de la fibre spéciale au sens classique auquel on a ajouté des arêtes de longueur 0^+ aux sommets correspondant aux composantes irréductibles non propres, une par point manquant.

Si $s \in S$, le tube Y_s de Y_s^{sp} privé de ses points marqués est un short (i.e. (le modèle formel d')un affinoïde avec bonne réduction), et si $a \in A_c$, le tube Y_a de P_a est une jambe (i.e. une couronne ouverte) de longueur $\mu(a)$ (on a $\mathscr{O}(Y_a) = \mathscr{O}_C[[T_{a,s_1}, T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2} - p^{\mu(a)})$, si s_1, s_2 sont les extrémités de a).

Les Y_i, pour $i \in I = S \sqcup A_c$, forment une partition de Y, mais si on veut pouvoir reconstruire Y, il faut encore une donnée de recollement de Y_s et Y_a si s est une extrémité de a. Le point P_a détermine une valuation de rang 2 sur $\mathscr{O}(Y_s)$, et donc un cercle fantôme $Y_{s,a}$ (le choix d'un paramètre local fournit un isomorphisme $\mathscr{O}(Y_{s,a}) \cong \mathscr{O}_C[[T_{s,a}, T_{s,a}^{-1}\rangle$, complété de $\mathscr{O}_C[[T_{s,a}]][T_{s,a}^{-1}]$ pour la topologie p-adique), et on aussi un cercle fantôme $Y_{a,s}$ correspondant sur Y_a, et la donnée de recollement est un isomorphisme $\iota_{a,s} : Y_{a,s} \cong Y_{s,a}$, i.e. un isomorphisme $\mathscr{O}_C[[T_{s,a}, T_{s,a}^{-1}\rangle \cong \mathscr{O}_C[[T_{a,s}, T_{a,s}^{-1}\rangle$.

L'ensemble des données précédentes (i.e. $\Gamma = (S, A, A_c, \mu)$, $(Y_i)_{i\in I}$, $(\iota_{i,j})_{(i,j)\in I_{2,c}}$, où $I_{2,c} = \{(a,s),\ a \in A_c \text{ et } s \text{ extrémité de } a\}$) est un patron de courbe. Ce qui précède explique [7] comment associer un patron de courbe à une courbe munie d'une triangulation

7. Comme un dessin vaut mieux qu'un long discours, le lecteur est invité à consulter les dessins du chap. 3 pour une représentation ❦ physique ❦ des objets ci-dessus.

assez fine, et qu'on peut reconstruire Y à partir de son patron. Réciproquement, on a le résultat suivant, analogue adique [8] de résultats de Harbater [29] et Raynaud [42], qui est un peu surprenant au vu de l'abondance de données de recollement possibles.

Théorème 0.9. — Si $(\Gamma, (Y_i)_{i\in I}, (\iota_{i,j})_{(i,j)\in I_{2,c}})$ est un patron de courbe, il existe un unique couple (Y, S), où Y est une courbe quasi-compacte et S une triangulation de Y, dont ce soit le patron.

Remarque 0.10. — (i) On peut s'amuser à varier les longueurs $\mu(a)$ des jambes et multiplier les $\iota_{i,j}$ par des $\alpha_{i,j} \in \mathscr{O}_C^*$ ou, ce qui revient au même, fixer les $\iota_{i,j}$ mais remplacer les Y_a par des Y_a^α, avec $\mathscr{O}(Y_a^\alpha) = \mathscr{O}_C[[T_{a,s_1}, T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2} - \alpha_a)$ et $\alpha_a \in \mathfrak{m}_C \setminus \{0\}$ (ou même $\alpha_a \in \mathfrak{m}_C$ si on se permet des courbes avec des singularités nodales). Cela fournit (cf. n° 3.6.3) des familles de courbes paramêtrées par des produits de boules ouvertes.

(ii) On peut aussi, avec les mêmes techniques, fabriquer une courbe relative sur $\mathrm{Spa}(\mathrm{A_{inf}}, \mathrm{A_{inf}})$ dont la fibre en $\tilde{p} = p$ (cf. n° 0.4.1 pour $\tilde{p}$) est Y_S et celle en $\tilde{p} = 0$ est une courbe singulière sur $\mathscr{O}_{\check{C}}$ dont le graphe dual est le même que celui de sa fibre spéciale (qui est aussi celle de Y_S).

Remarque 0.11. — (i) En dimension supérieure, si on part d'une variété analytique quasi-compacte Y ayant un modèle semi-stable Y_S sur $\mathscr{O}_C$, assez fin, on peut découper cette variété en prenant les images réciproques des éléments du découpage naturel de la fibre spéciale. Chaque pièce est une fibration en affinoïdes ayant bonne réduction au-dessus d'une polycouronne, et ces pièces se recollent le long de fibrations en affinoïdes au-dessus de polycouronnes fantômes pour reconstruire Y. Cela devrait permettre de donner une description de la cohomologie de Y ne faisant intervenir que la combinatoire du squelette de Y et la cohomologie d'affinoïdes avec bonne réduction et celle de polycouronnes.

(ii) On peut se demander, en l'absence d'un théorème de réduction semi-stable général, quelles sont les pièces minimales dont on a besoin pour reconstruire toute variété quasi-compacte lisse. En particulier, quel genre de pièces fournit la théorie des altérations à la Hartl [30] et Temkin [46] ?

0.2.2. Applications à la cohomologie. — Le découpage précédent d'une courbe en shorts et jambes permet de ramener l'étude de la cohomologie des courbes à celle des shorts et des jambes et celle du graphe Γ. De manière générale, si $H^\bullet$ est une cohomologie à coefficients dans un module Λ, raisonnable (en particulier, $H^0(Z) = \Lambda^{\pi_0(Z)}$ et, si Z est un cercle fantôme, on dispose d'une application résidu $H^1(Y_{i,j}) \to \Lambda$ ayant les propriétés habituelles), ce découpage fournit une filtration naturelle sur $H^1(Y_S)$ dont les quotients successifs [9] sont :

$$H^1(Y_S) = \left[\ H^1(\Gamma, \Lambda) \text{ — } \textstyle\prod_{i\in I} H^1(Y_i)_0 \text{ — } H^1_c(\Gamma, \Lambda)^*\ \right],$$

8. Ou plutôt adoque, cf. (iii) de la rem. 2.2 et § 3.1. La géométrie adoque est à la géométrie adique ce que le ticket choc est au ticket chic, écho lointain d'une époque épique `https://www.youtube.com/watch?v=247w8q1tPsY`.

9. La notation $M = \left[\ A \text{ — } B \text{ — } C\ \right]$ signifie que l'on a une filtration $0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 = M$ avec $M_1 = A$, $M_2/M_1 = B$ et $M_3/M_2 = C$.

où :

• $H^1(\Gamma,\Lambda)$ et $H^1_c(\Gamma,\Lambda)$ sont les groupes de cohomologie et de cohomologie à support compact de l'espace topologique Γ et $H^1_c(\Gamma,\Lambda)^*$ est le Λ-dual de $H^1_c(\Gamma,\Lambda)$; on a (cf. §1.2 pour la définition des flèches correspondantes) :

$$H^1(\Gamma,\Lambda)=\mathrm{Coker}(\Lambda^S\to\Lambda^{A_c})\quad\text{et}\quad H^1_c(\Gamma,\Lambda)^*=\mathrm{Ker}(\Lambda^A\to\Lambda^S).$$

• $H^1(Y_i)_0$ est l'ensemble des classes dont tous les résidus en les cercles fantômes à la frontière de Y_i sont nuls.

• La flèche $H^1(Y_S)\to H^1_c(\Gamma,\Lambda)^*$ est celle envoyant une classe sur la collection de ses résidus.

Remarque 0.12. — (i) Le sous-groupe $H^1(\Gamma,\Lambda)$ apparaît comme le conoyau de $\prod_{i\in I}H^0(Y_i)\to\prod_{(i,j)\in I_{2,c}}H^0(Y_{i,j})$; voir le (ii) de la rem. 1.4 pour le lien entre cette écriture et celle ci-dessus.

(ii) On dispose d'un opérateur $N_\mu : H^1_c(\Gamma,\mathrm{Q})^*\to H^1(\Gamma,\mathrm{Q})$ (de monodromie) qui fait intervenir les longueurs $\mu(a)$ des arêtes. Cela munit $H^1(Y)$, si Λ est un Q-module, d'un opérateur de monodromie N (cf. rem. 1.6).

Les cohomologies de de Rham, de Hyodo-Kato, ou proétale ℓ-adique (pour tout ℓ) sont raisonnables, ce qui conduit au th. 0.13 ci-dessous.

On note $\partial Y\subset S$ le bord analytique de Y, i.e. l'ensemble des $s\in S$ tels que Y_s^{sp} contienne des points avec $\mu(a)=0^+$ (i.e. les s tels que la composante irréductible correspondante de la fibre spéciale classique ne soit pas propre). On pose $S_{\mathrm{int}}=S\setminus\partial Y$, et on note Γ_{int} le sous-graphe de Γ obtenu en supprimant les sommets de ∂Y et les arêtes ayant une extrémité dans ∂Y.

Théorème 0.13. — (i) Si $\ell\neq p$, alors $H^1_{\mathrm{et}}(Y,\mathrm{Q}_\ell(1))$ admet une filtration naturelle dont les quotients successifs sont

$$H^1_{\mathrm{et}}(Y,\mathrm{Q}_\ell(1))=\big[\ H^1(\Gamma,\mathrm{Q}_\ell(1))-\prod_{s\in S}H^1_{\mathrm{et}}(Y_s^{\mathrm{sp}},\mathrm{Q}_\ell(1))-H^1_c(\Gamma,\mathrm{Q}_\ell)^*\ \big].$$

(ii) $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}$ admet une filtration naturelle dont les quotients successifs sont

$$H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}=\big[\ H^1(\Gamma_{\mathrm{int}},\breve{C})-\prod_{s\in S_{\mathrm{int}}}H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp}})\oplus\prod_{s\in\partial Y}H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp}})^{[1]}-H^1_c(\Gamma,\breve{C})^*(-1)\ \big],$$

où le $[1]$ en exposant désigne le sous-espace de pente 1 pour l'action de φ et le twist (-1) signifie que l'on multiplie l'action naturelle de φ par p.

Remarque 0.14. — (i) Les termes des filtrations ci-dessus ne dépendent pas de S car $H^1_{\mathrm{et}}(\mathrm{P}^1,\mathrm{Q}_\ell(1))=0$ et $H^1_{\mathrm{rig}}(\mathrm{P}^1)=0$. Cela permet, en passant à la limite sur tous les choix possibles, d'en déduire que tout est fonctoriel.

(ii) Pour $\mathrm{Q}_\ell(1)$, le seul bonus de ce résultat par rapport à ce qui est dit ci-dessus est l'identification (classique) de $H^1_{\mathrm{et}}(Y_s,\mathrm{Q}_\ell(1))_0$ avec $H^1_{\mathrm{et}}(Y_s^{\mathrm{sp}},\mathrm{Q}_\ell(1))$.

(iii) Pour H^1_{HK}, il faut se fatiguer un peu plus pour arriver au résultat : l'identification (prop. 5.20) de $H^1_{\mathrm{HK}}(Y_s)^{\mathrm{sep}}_0$ et $H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp}})^{[1]}$ utilise la théorie de Cartier. Le passage de $H^1(\Gamma, \breve{C})$ à $H^1(\Gamma_{\mathrm{int}}, \breve{C})$ découle du calcul (lemme 6.15) de l'intersection de $H^1(\Gamma, C)$ et de l'adhérence de 0 dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$.

(iv) Si Y est propre, on a $\partial Y = \varnothing$, et la filtration du (ii) est à la base de la construction de Coleman et Iovita [10].

(v) Le choix de $r \mapsto p^r$ fournit une section de la projection modulo $H^1(\Gamma, \mathrm{Q}_\ell(1))$. La formule de Picard-Lefschetz (rem. 6.4), qui fait intervenir l'opérateur de monodromie N, décrit ce qui se passe quand on change $r \mapsto p^r$.

En passant à la limite, on obtient le résultat suivant :

Théorème 0.15. — Soit Y un affinoïde surconvergent ou une courbe sans bord, et soit S une triangulation de Y, assez fine.

(i) Si $\ell \neq p$, alors $H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathrm{Q}_\ell(1))$ admet une filtration naturelle dont les quotients successifs sont

$$H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathrm{Q}_\ell(1)) = \left[\ H^1(\Gamma, \mathrm{Q}_\ell(1)) \text{ — } \textstyle\prod_{s\in S} H^1_{\mathrm{et}}(Y_s^{\mathrm{sp}}, \mathrm{Q}_\ell(1)) \text{ — } H^1_c(\Gamma, \mathrm{Q}_\ell)^*\ \right].$$

(ii) $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)$ admet une filtration naturelle dont les quotients successifs sont

$$H^1_{\mathrm{HK}}(Y) = \left[\ H^1(\Gamma, \breve{C}) \text{ — } \textstyle\prod_{s\in S} H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp}}) \text{ — } H^1_c(\Gamma, \breve{C})^*(-1)\ \right].$$

Remarque 0.16. — (i) Pour la même raison que ci-dessus, les termes des filtrations ne dépendent pas de S.

(ii) Les actions de $\mathrm{Aut}(Y)$ sur $H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathrm{Q}_\ell(1))$ et $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)$ fournissent des représentations isomorphes (autant que faire se peut, i.e. après avoir choisi un plongement de Q_ℓ dans C...). Si Y est défini sur une extension finie K de Q_p, les actions du groupe de Weil-Deligne WD_K de K sont aussi isomorphes. Voir [41] pour une autre approche dans le cas propre.

(iii) En utilisant les résultats connus [5, 21, 49] sur la cohomologie étale ℓ-adique de la tour de Drinfeld (en dimension 1), le (ii) fournit une preuve du th. 0.4 de [15] qui donne une description de l'action de $G \times \breve{G} \times \mathrm{WD}_F$ sur la cohomologie de Hyodo-Kato de la tour (dans [15], cette description est obtenue en utilisant l'uniformisation de courbes de Shimura, la compatibilité local-global et l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld). Couplé avec le th. 0.7, cela permet de retrouver le th. 0.8 de [15] dont la preuve utilise aussi des méthodes globales.

0.2.3. Symboles et intégration p-adique. — Soient X une courbe compacte, $B \hookrightarrow X$ un plongement de la boule unité fermée dans X et Y l'affinoïde de X complémentaire de l'image de la boule unité ouverte. On a alors $\mathscr{O}(Y)^*/C^* = \mathscr{O}(Y)^{**}/(1+\mathfrak{m}_C)$, et $H^1_{\mathrm{HK}}(X) = H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}$. (Si on retire r disques, alors $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}/H^1_{\mathrm{HK}}(X) \cong \breve{C}^{r-1}$.)

Soit J la jacobienne de X. On munit $J(C)$ de la topologie obtenue en voyant $J(C)$ comme l'ensemble des C-points de la variété analytique rigide associée à J ce qui en fait un groupe de

Lie sur C ; si J est de dimension g, son algèbre de Lie est isomorphe à C^g et, si $n \in \mathbf{N}$ est suffisamment grand (disons $n \geq n_0$), l'application exponentielle $\exp_J$ induit un isomorphisme de $(p^n \mathscr{O}_C)^g$ sur un sous-groupe ouvert U_n de $J(C)$. Les translatés des U_n, pour $n \geq n_0$, forment alors une base de la topologie de $J(C)$.

On déduit de la suite exacte de Kummer et du calcul [48] de $H^1(Y, \mathscr{O}^*)$, une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^* \to H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Q}_p(1)) \to \widehat{J} \to 0,$$

où $\widehat{J}$ est le revêtement universel du groupe p-divisible de J, i.e. l'ensemble

$$\widehat{J} = \{(x_n)_{n \in \mathbf{Z}},\ x_n \in J(C),\ p \cdot x_{n+1} = x_n,\ \lim_{n \to -\infty} x_n = 0\}.$$

On en déduit, en comparant la suite exacte ci-dessus et celle du th. 0.1, le résultat suivant qui est classique dans le cas de bonne réduction (ou pour les groupes p-divisibles [22, 44]).

Théorème 0.17. — On a un isomorphisme naturel

$$\iota_{\text{st}} : \widehat{J} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{B}^+_{\text{st}} \otimes H^1_{\text{HK}}(X))^{N=0, \varphi=p}.$$

Remarque 0.18. — Si X est définie sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, et si $C = \mathbf{C}_p$, en utilisant des techniques d'intégration p-adique sur les courbes [8, 9, 11, 12], on peut donner une description explicite de cet isomorphisme. Si $\widetilde{J}$ est l'extension universelle de J, on dispose d'une application naturelle G_K-équivariante (Lemme 12 ou § B.2 de [12])

$$\iota_{\mathbf{B}_{\text{dR}}} : \widehat{J} \to \widetilde{J}(\mathbf{B}^+_{\text{dR}})$$

définie de la manière suivante : si $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in \widehat{J}$, on choisit une suite bornée $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de relèvements des x_n dans $\widetilde{J}(\mathbf{B}^+_{\text{dR}})$, et on envoie x sur la limite de $p^n \cdot \hat{x}_n$, quand $n \to +\infty$, la multiplication par p^n étant celle sur $\widetilde{J}$. Alors

$$\iota_{\text{st}} = \log_{\widetilde{J}} \circ \iota_{\mathbf{B}_{\text{dR}}},$$

où $\mathbf{B}^+_{\text{st}} \otimes H^1_{\text{HK}}(X)$ s'injecte dans $\mathbf{B}^+_{\text{dR}} \otimes_K H^1_{\text{dR}}(X)$ via ι_{HK},

$$\log_{\widetilde{J}} : \widetilde{J}(\mathbf{B}^+_{\text{dR}}) \to \mathbf{B}^+_{\text{dR}} \otimes_K H^1_{\text{dR}}(J)^*$$

est le logarithme de $\widetilde{J}$ à valeurs dans son algèbre de Lie, et on a des identifications $H^1_{\text{dR}}(J)^* \cong H^1_{\text{dR}}(X)^* \cong H^1_{\text{dR}}(X)$, la seconde étant fournie par le cup-produit dans $H^2_{\text{dR}}(X) \cong K$.

0.3. Preuves. — Soient Y une courbe quasi-compacte, S une triangulation assez fine, Y_S le modèle associé et $(\Gamma, (Y_i)_{i \in I}, (\iota_{i,j})_{(i,j) \in I_{2,c}})$ le patron correspondant.

La preuve des th. 0.1 et 0.4 repose sur :

• la définition d'un groupe de symboles $\text{Symb}_p(Y)$, :

• la construction de régulateurs étale $\text{Symb}_p(Y) \to H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Q}_p(1))$ et syntomique $\text{Symb}_p(Y) \to H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1)$ qui s'avèrent être des isomorphismes,

• une description de $H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1)$ en termes du complexe de de Rham et de ses variantes.

0.3.1. Symboles. — Soit Y une courbe quasi-compacte et soient $C(Y)$ le corps des fonctions rationnelles sur Y et $\mathrm{Div}(Y)$ le groupe des sommes formelles $\sum_{x\in Y(C)} n_x x$, avec $n_x \in \mathbf{Z}$ pour tout $x \in Y(C)$ (on dit que $\sum_{x\in Y(C)} n_x x$ est à support fini si $n_x = 0$ pour tout x sauf un nombre fini).

Si ℓ est un nombre premier, on définit le groupe de symboles $\mathrm{Symb}_\ell(Y)$ comme

$$\mathrm{Symb}_\ell(Y) = \frac{\{(f_n)_{n\in\mathbf{N}},\ f_n \in C(Y)^*,\ \mathrm{Div}(f_n) \in \ell^n \mathrm{Div}(Y),\ f_{n+1}/f_n \in (C(Y)^*)^{\ell^n}\}}{\{(h_n^{\ell^n}),\ h_n \in C(Y)^*\}}.$$

On a une suite exacte

$$0 \to H^1(\Gamma, \mathbf{Z}_\ell(1)) \to \mathrm{Symb}_\ell(Y) \to \mathrm{Ker}\Big(\prod_{i\in I} \mathrm{Symb}_\ell(Y_i^{\mathrm{gen}}) \to \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \mathrm{Symb}_\ell(Y_{i,j}^{\mathrm{gen}})\Big),$$

où les « gen » en exposant signifient « fibre générique » et les groupes $\mathrm{Symb}_\ell(Y_i^{\mathrm{gen}})$ sont définis comme ci-dessus en imposant que le diviseur de f_n soit à support fini si Y_i est une jambe (c'est automatique pour Y ou pour un short, par quasi-compacité).

0.3.2. Régulateur étale. — L'application qui, à une fonction, associe sa classe de Kummer, fournit un régulateur étale $\mathrm{Symb}_\ell(Y) \to H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1))$ et la suite exacte de Kummer

$$0 \to (\mathbf{Z}/\ell^n) \otimes \mathscr{O}(Y)^* \to H^1_{\text{et}}(Y, (\mathbf{Z}/\ell^n)(1)) \to \mathrm{Pic}(Y)[\ell^n] \to 0$$

permet de montrer (cor. 5.5) que ce régulateur fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Symb}_\ell(Y) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1)).$$

En utilisant la suite exacte ci-dessus, cela ramène le calcul de $H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1))$ à celui des groupes $\mathrm{Symb}_\ell(Y_i^{\mathrm{gen}})$. Si $\ell \neq p$, ce calcul est trivial si Y_i est une jambe (lemme 4.4) et classique si Y_i est un short (prop. 5.10); on en déduit le (i) du th. 0.13 et la formule « de Picard-Lefschetz » (rem. 6.4, résultats on ne peut plus classiques).

0.3.3. Régulateur syntomique. — Si $\ell = p$, on utilise des méthodes syntomiques pour faire le calcul. On note $\mathrm{Syn}(Y_S, 1)$ le complexe total associé au complexe double [10]

$$\begin{array}{ccccc}
\prod_{i\in I} F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y}_i) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \Omega^1(\widetilde{Y}_i) \oplus \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j}) & \longrightarrow & \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \Omega^1(\widetilde{Y}_{i,j})_{d=0} \\
\downarrow{\scriptstyle 1-\frac{\varphi}{p}} & & \downarrow{\scriptstyle 1-\frac{\varphi}{p}} \quad \downarrow{\scriptstyle 1-\frac{\varphi}{p}} & & \downarrow{\scriptstyle 1-\frac{\varphi}{p}} \\
\prod_{i\in I} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_i) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \Omega^1(\widetilde{Y}_i) \oplus \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j}) & \longrightarrow & \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \Omega^1(\widetilde{Y}_{i,j})_{d=0}
\end{array}$$

dans lequel, si $Z = Y_i, Y_{i,j}$, $\mathscr{O}(\widetilde{Z})$ est une $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$-algèbre munie d'un frobenius φ et d'une surjection $\theta : \mathscr{O}(\widetilde{Z}) \to \mathscr{O}(Z)$ dont la restriction à $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est l'application de Fontaine $\theta : \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathscr{O}_C$, $F^1\mathscr{O}(\widetilde{Z}) = \mathrm{Ker}\,\theta$, et $\Omega^1(\tilde{Z})$ est le module $\Omega^1_{\mathscr{O}(\widetilde{Z})/\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}}$. Il y a des choix naturels pour les $\mathscr{O}(\widetilde{Z})$ qui simplifient grandement les calculs [11] :

10. Le frobenius φ sur les formes différentielles est défini de telle sorte que $\varphi \circ d = d \circ \varphi$.

11. L'anneau $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})$ ci-dessus correspond à l'anneau $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}}$ du n° 6.3.4.

• un short Y_s est obtenu par extension des scalaires à partir d'un schéma formel $\breve{Y}_s$ lisse sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$, et on pose $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_s) = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \mathscr{O}(\breve{Y}_s)$ (et on choisit un φ sur $\mathscr{O}(\breve{Y}_s)$);

• une jambe Y_a de longueur r vérifie $\mathscr{O}(Y_a) = \mathscr{O}_C[[T_1,T_2]]/(T_1T_2 - p^r)$, et on pose $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_a) = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T_1,T_2]]/(T_1T_2 - \tilde{p}^r)$, où $\tilde{p}^r \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est un teichmüller vérifiant $\theta(\tilde{p}^r) = p^r$ (et on prend φ défini par $\varphi(T_i) = T_i^p$, si $i = 1, 2$).

Le complexe $\mathrm{Syn}(Y_S, 1)$ est le complexe double associé au cône

$$[\ F^1 C_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S) \xrightarrow{1-\varphi/p} C_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)\ ],$$

où $C_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ est le complexe

$$\textstyle\prod_{i\in I} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} \Omega^1(\widetilde{Y}_i) \oplus \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j}) \longrightarrow \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \Omega^1(\widetilde{Y}_{i,j})_{d=0}$$

qui calcule la cohomologie cristalline logarithmique absolue de Y_S.

On note $H^i_{\mathrm{Syn}}(Y_S, 1)$ les groupes de cohomologie du complexe $\mathrm{Syn}(Y_S, 1)$.

On définit un régulateur syntomique $\mathrm{Symb}_p(Y) \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S, 1)$ en envoyant $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur le cocycle $\lim_{n\to\infty} \big(\frac{d\tilde{f}_{n,i}}{\tilde{f}_{n,i}}, \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(\tilde{f}_{n,i})}{\tilde{f}^p_{n,i}}, \log(\frac{\tilde{f}_{n,i}}{\tilde{f}_{n,j}})\big)$, où $\tilde{f}_{n,i} \in \mathscr{O}(\widetilde{Y}_i)$ est un relèvement de la restriction de f_n à Y_i (il faut prendre un peu de précautions en choisissant ces relèvements car f_n peut avoir des zéros et des pôles, mais la limite est holomorphe car les multiplicités de ces zéros et pôles sont divisibles par p^n). On prouve alors (prop. 6.24) que ce régulateur syntomique induit un isomorphisme

$$\mathrm{Symb}_p(Y) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S, 1).$$

On commence par prouver le résultat pour les Y_i (le cas des shorts (th. 5.34) est nettement plus délicat que celui des jambes (prop. 4.11)), et on recolle.

0.3.4. Cohomologie syntomique et cohomologie de Hyodo-Kato. — Les groupes de cohomologie de $C_{\mathrm{dR}}(Y) = C \otimes_{\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}} C_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ sont les $H^i_{\mathrm{dR}}(Y)$, et les $H^i_{\mathrm{HK}}(Y)$ sont, par définition, les groupes de cohomologie de $C_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S) = \breve{C} \otimes_{\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}} C_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ (les extensions de scalaires se font via $\theta : \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathscr{O}_C$ et $\theta_0 : \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathscr{O}_{\breve{C}}$).

Par ailleurs, on peut (lemme 6.19) modifier légèrement $C_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ pour obtenir un complexe $\overline{C}_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ quasi-isomorphe, de telle sorte que l'inclusion de $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ induise un morphisme de complexes $\overline{C}_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S) \to \mathbf{Q}_p \otimes \overline{C}_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$, commutant à φ, et section de $\mathbf{Q}_p \otimes \overline{C}_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S) \to \overline{C}_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S)$, ce qui fournit (quasiment gratuitement) des isomorphismes

$$\mathbf{Q}_p \otimes H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S) \cong \mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}} \widehat{\otimes}_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y) \quad \text{et} \quad \iota_{\mathrm{HK}} : H^1_{\mathrm{dR}}(Y) \cong C \widehat{\otimes}_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y).$$

En jouant avec les différentes présentations possibles du cône ci-dessus, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}(Y)/C \to \mathbf{Q}_p \otimes H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S, 1) \to \mathbf{Q}_p \otimes H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p} \to H^1(Y, \mathscr{O}) \to \mathbf{Q}_p \otimes H^2_{\mathrm{syn}}(Y_S, 1) \to \cdot$$

Si Y est compacte, $\mathscr{O}(Y) = C$ et la flèche $\mathbf{Q}_p \otimes H^1(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p} \to H^1(Y, \mathscr{O})$ est surjective, alors que si Y n'est pas compacte, $H^1(Y, \mathscr{O}) = 0$. Si Y est un affinoïde, cela fournit donc une suite

exacte

$$0 \to \mathscr{O}(Y)/C \to \mathbf{Q}_p \otimes H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1) \to (\mathbf{B}^+_{\text{cris}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\check{C}} H^1_{\text{HK}}(Y))^{\varphi=p} \to 0.$$

Pour passer de $H^1_{\text{HK}}(Y)$ à $H^1_{\text{HK}}(Y)^{\text{sep}}$, il s'agit alors de comprendre le lien entre $(\mathbf{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**})/\exp(\mathscr{O}(Y))$ et l'adhérence de 0 dans $(\mathbf{B}^+_{\text{cris}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\check{C}} H^1_{\text{HK}}(Y))^{\varphi=p}$. Localement, ceci entre dans l'isomorphisme $\text{Symb}_p(Y_i^{\text{gen}}) \cong H^1_{\text{syn}}(Y_i, 1)$ (implicitement pour les jambes (prop. 4.11) et explicitement pour les shorts (prop. 5.32)) et le cas général s'obtient par recollement (th. 6.30).

Remarque 0.19. — On dispose de vrais isomorphismes

$$H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_p(1)) \xleftarrow{\sim} \text{Symb}_p(Y) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1),$$

ne faisant pas intervenir de dénominateurs (au moins si $p \neq 2$). Les dénominateurs apparaissent dans la description de $H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ en termes de $H^1_{\text{HK}}(Y)$; ces dénominateurs dépendent des longueurs des jambes de Y_S (plus ces jambes sont courtes et plus les résultats sont imprécis). Si Y est un affinoïde, on a une suite p^2-exacte (th. 6.30) :

$$0 \to \mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1) \to (H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\text{sep}})^{\varphi=p} \to H^1(Y_S, \mathscr{O}),$$

et $H^1(Y_S, \mathscr{O})$ est tué par une puissance de p.

0.3.5. Remerciements

Nous remercions Bhargav Bhatt, Antoine Ducros, Antoine Chambert-Loir et Peter Scholze pour des conversations (en présentiel ou électroniques) au sujet de cet article, et le rapporteur pour sa lecture attentive et ses commentaires judicieux. W.N. a donné un cours sur des parties de cet article à l'automne 2016, à l'université Fudan de Shanghai ; elle voudrait remercier Shanwen Wang pour son invitation et les auditeurs pour leurs commentaires.

0.4. Quelques notations et définitions

0.4.1. Anneaux de périodes. — On fixe un morphisme $r \mapsto p^r$ de $(\mathbf{Q}, +)$ dans $(C^*, \times)$ prenant la valeur p pour $r = 1$. Cela fournit aussi un morphisme $r \mapsto \tilde{p}^r$ du monoïde $\mathbf{Q}_+$ dans $W(\mathscr{O}_C^\flat) = \mathbf{A}_{\text{inf}} \subset \mathbf{A}_{\text{cris}}$, avec $\tilde{p}^r = [(p^r)^\flat]$ et $(p^r)^\flat = (p^r, p^{r/p}, \dots)$. On note

$$\theta_0 : \mathbf{A}_{\text{cris}} \to \mathscr{O}_{\check{C}} \quad \text{et} \quad \theta : \mathbf{A}_{\text{cris}} \to \mathscr{O}_C$$

les morphismes usuels (on a $\theta(\tilde{p}^r) = p^r$ si $r \geq 0$, et $\theta_0(\tilde{p}^r) = 0$ si $r > 0$).

0.4.2. Séries entières. — Si A est un anneau topologique séparé et complet pour la topologie I-adique, où I est un idéal de A de type fini et contenant p, et si $x = (x_1, \dots, x_d)$, on note :

- $A[[x]]$ l'anneau des séries entières $\sum_{i \in \mathbf{N}^d} a_i x^i$ avec $a_i \in A$, pour tout i,
- $A\langle x \rangle$ le sous-anneau de $A[[x]]$ des $\sum_{i \in \mathbf{N}^d} a_i x^i$ avec $a_i \to 0$ quand $i \to \infty$,
- $A[[x]]^\dagger$ le sous-anneau de $A[[x]]$ des $\sum_{i \in \mathbf{N}^d} a_i x^i$ tels qu'il existe $r > 0$ tel que $a_i \in p^{\lceil r|i| \rceil} A$, pour tout i,
- $A[[T, T^{-1}\rangle$ le complété de $A[[T]][T^{-1}]$ pour la topologie I-adique.

0.4.3. Boules, couronnes, cercles fantômes. — On appelle [12] boule unité ouverte un schéma formel de la forme $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C[[T]])$. Une jambe Y est un schéma formel de la forme $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C[[T_1,T_2]]/(T_1T_2-\alpha))$, avec $\alpha\in\mathfrak{m}_C$. La longueur [13], de Y est $v_p(\alpha)$ et on l'oriente en choisissant T_1 comme paramètre local (choisir T_2 à la place renverse l'orientation). On appelle cercle fantôme un schéma formel de la forme $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle)$.

La frontière de la boule unité $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C[[T]])$ est le cercle fantôme $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle)$. La frontière de la couronne ouverte $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C[[T_1,T_2]]/(T_1T_2-\alpha))$ est constituée des deux cercles fantômes $Y_1=\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C[[T_1,T_1^{-1}\rangle)$ et $Y_2=\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C[[T_2,T_2^{-1}\rangle)$. Dans les deux cas, la frontière est incluse dedans.

Si Y est un schéma formel sur $\mathscr{O}_C$, on pose $\mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})=\mathscr{O}(Y)[\frac{1}{p}]$. On renvoie à l'appendice (en particulier au § A.4) pour des considérations sur les fibres génériques.

0.4.4. Résidus. — Si Y est un cercle fantôme $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle)$, on note $\Omega^1(Y)$ le module $\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle\frac{dT}{T}$ des formes différentielles continues. Si $\omega=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_kT^k\frac{dT}{T}$, on définit [14] son résidu $\mathrm{Res}_Y(\omega)$ (ou simplement $\mathrm{Res}(\omega)$) par la formule $\mathrm{Res}_Y(\omega)=\alpha_0$.

Si Y est une couronne $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C[[T_1,T_2]]/(T_1T_2-\alpha))$, on note $\Omega^1(Y)$ le module $\mathscr{O}_C[[T_1,\frac{\alpha}{T_1}]]\frac{dT_1}{T_1}$ des formes différentielles continues. Si $\omega=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_kT_1^k\frac{dT_1}{T_1}$, on définit son résidu $\mathrm{Res}_Y(\omega)$ par la formule $\mathrm{Res}_Y(\omega)=\alpha_0$. Notons que $\mathrm{Res}_Y(\omega)$ dépend de l'orientation de Y : comme $\frac{dT_1}{T_1}+\frac{dT_2}{T_2}=0$, changer l'orientation change le signe de $\mathrm{Res}_Y(\omega)$. Notons aussi que, si Y_1,Y_2 sont les cercles fantômes à la frontière de Y, on a $\mathrm{Res}_Y(\omega)=\mathrm{Res}_{Y_1}(\omega)=-\mathrm{Res}_{Y_2}(\omega)$.

1. Cohomologie des graphes

Ce court chapitre contient des définitions de base concernant les graphes. Comme nous le verrons, on peut associer à une courbe analytique X (resp. à un modèle semi-stable X_S de X) deux graphes, à savoir son squelette analytique $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$, cf. n° 2.3.3, et le graphe dual $\Gamma(X^{\mathrm{sp}})$ de sa fibre spéciale, cf. § 8.2, (resp. $\Gamma(S)$ et $\Gamma(X_S^{\mathrm{sp}})=\Gamma^{\mathrm{ad}}(S)$, cf. n° 2.3.4 et § 2.4). Si X est une courbe sans bord, ces deux graphes sont égaux mais, si X a un bord, le squelette $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ est naturellement muni d'une métrique, alors que $\Gamma(X^{\mathrm{sp}})$ est seulement muni d'une semi-métrique et son séparé est $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$. La raison pour laquelle nous nous intéressons à ces notions est que la cohomologie de X (resp. X_S) a une décomposition naturelle faisant intervenir la cohomologie de $\Gamma(X^{\mathrm{sp}})$ (resp. $\Gamma(X_S^{\mathrm{sp}})$).

12. On renvoie au n° 3.1.2 pour un point de vue adoque sur ces objets.

13. Elle ne dépend pas du choix de l'uniformisante T_1 grâce au lemme 4.2 : l'inclusion de $\Lambda:=\mathscr{O}_C[[T_1,T_2]]/(T_1T_2-\alpha)$ dans $\mathscr{O}_C[[T_i,T_i^{-1}\rangle$ fournit, si $u\in(\Lambda[\frac{1}{p}])^*$, des couples $(v_1(u),v_1'(u))$ et $(v_2(u),v_2'(u))$, qui sont reliés par la formule $v_2(u)=v_1(u)+v_1'(u)v_p(\alpha)$ et $v_2'(u)=-v_1'(u)$, si $u\in\mathscr{O}(Y)$.

14. L'indépendance de ce résidu par rapport au choix de T résulte du lemme 4.2 : si $u\in(\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle)^*$, on a $\mathrm{Res}(\frac{du}{u})=v'(u)$ (indépendant du choix de T) et le cas général s'en déduit par linéarité et continuité.

1.1. Graphes

1.1.1. Sommets et arêtes. — Un graphe [15] Γ est un espace topologique séparé muni d'un sous-ensemble discret S (les sommets de Γ) tel que les composantes connexes de $\Gamma \setminus S$ (les arêtes de Γ) soient des courbes réelles sans bord (i.e. homéomorphes à des segments ouverts ou des cercles).

On note A l'ensemble des arêtes. Si $a \in A$, on note $S(a)$ l'ensemble des $s \in S$ dans l'adhérence de a (les extrémités de a) et $\overline{a}$ l'adhérence de a dans Γ (réunion de a et $S(a)$). Alors $S(a)$ contient au plus deux points. Remarquons que, si Γ est connexe, et si A contient une arête a sans extrémité, alors $\Gamma = a$ (et $S = \varnothing$ et $A = \{a\}$); dans le cas contraire, toutes les arêtes ont au moins une extrémité et, en particulier, ce sont toutes des segments.

On note A_c l'ensemble des arêtes a telles que $\overline{a}$ soit compacte.

1.1.2. Orientation. — On dit que Γ est orienté si toutes les arêtes sont munies d'une orientation. Dans ce cas, on peut différencier les extrémités d'une arête a, et on note $s_1(a)$ l'origine de a et $s_2(a)$ le bout de a (s'ils existent : si Γ n'est pas un cercle sans sommet, alors a a une origine et un bout si et seulement si $a \in A_c$, notons que rien n'empêche alors que $s_2(a) = s_1(a)$; si Γ n'est pas un segment sans sommet, alors une arête n'appartenant pas à A_c a soit une origine, soit un bout, mais pas les deux à la fois).

Soit Γ un graphe orienté. Si $s \in S$, on pose

$$A(s)^+ = \{a \in A,\ s_1(a) = s\}, \quad A(s)^- = \{a \in A,\ s_2(a) = s\},$$
$$A(s) = A(s)^+ \cup A(s)^-, \quad A_c(s) = A(s) \cap A_c,$$

et donc $A(s)$ (resp. $A_c(s)$) est l'ensemble des arêtes (resp. arêtes relativement compactes) dont une des extrémités est s. Le cardinal de $A(s)$ est la valence de s.

1.1.3. L'ensemble $\overline{\mathrm{R}}_+^*$ des longueurs. — On note $\overline{\mathrm{R}}_+^*$ l'ensemble constitué des :
- r, pour $r \in \mathrm{R}_+^* \sqcup \{\infty, 2\infty\}$,
- r^+ pour $r \in \mathrm{R}_+ \sqcup \{\infty\}$,
- r^{++} pour $r \in \mathrm{R}_+$.

1.1.4. Métrique. — On dit que Γ est métrisé si, pour toute arête a, son adhérence $\overline{a}$ est munie d'un homéomorphisme sur un intervalle de R (pas forcément de longueur finie) ou un homothétique du cercle unité. On note alors $\mu(a) \in \mathrm{R}_+^* \sqcup \{\infty, 2\infty\}$ la longueur de l'arête a (i.e. la longueur de l'intervalle ou du cercle correspondant), en posant $\mu(a) = \infty$ si l'intervalle de R est une demi-droite et $\mu(a) = 2\infty$ si cet intervalle est R tout entier. Un graphe métrisé est naturellement un espace métrique.

On dit que Γ est semi-métrisé si :

• L'adhérence $\overline{a}$ de tout $a \in A_c$ est munie d'un homéomorphisme sur un intervalle (compact) de R ou un homothétique du cercle unité.

15. Tous nos graphes sont supposés localement finis, i.e. tout point de Γ a un voisinage U tel que $U \cap (\Gamma \setminus S)$ n'ait qu'un nombre fini de composantes connexes.

• L'adhérence $\overline{a}$ de tout $a \in A \setminus A_c$ est munie d'une application continue $\overline{a} \to \mathrm{R}$ induisant un homéomorphisme d'un sous-intervalle $\overline{a}'$ contenant l'extrémité éventuelle de a sur un sous-intervalle de R, et contractant les bouts de a, i.e. les composantes connexes de $\overline{a} \setminus \overline{a}'$ (au nombre de 0, 1 ou 2) en des points.

On définit la longueur $\mu(a) \in \overline{\mathrm{R}}_+^*$, si $a \in A$, par :

• Si $a \in A_c$, alors $\mu(a) \in \mathrm{R}_+^* \sqcup \{\infty, 2\infty\}$ est la longueur de l'intervalle ou du cercle correspondant.

• Si $a \in A \setminus A_c$, et si $r \in \mathrm{R}_+^* \sqcup \{\infty, 2\infty\}$ est la longueur du segment correspondant, alors $\mu(a) = r$ (resp. $\mu(a) = r^+$, resp. $\mu(a) = r^{++}$) si $\overline{a} \setminus \overline{a}'$ a 0 (resp. 1, resp. 2) composantes connexes. (Le nombre de $+$ est le nombre de bouts.)

Remarque 1.1. — Si Γ est semi-métrisé, on peut fabriquer à partir de Γ un graphe $\overline{\Gamma}$ métrisé, appelé le séparé de Γ, en remplaçant $\overline{a}$ par $\overline{a}'$ si $a \in A \setminus A_c$ (i.e. en contractant tous les bouts d'arêtes de longueur nulle) et en rajoutant les extrémités de $\overline{a}'$ aux sommets (par exemple, si a a une extrémité s, et si $\overline{a}'$ est compact, alors une des extrémités de $\overline{a}'$ est s et l'autre est un nouveau sommet).

Pour retrouver Γ à partir de $\overline{\Gamma}$, il faut rajouter des arêtes de longueur nulle et supprimer les sommets dont la valence est passée de 1 à 2.

Un graphe semi-métrisé est dit :

• compact s'il est métrisé et l'espace métrique associé est compact,

• quasi-compact si son séparé est compact,

• complet s'il est métrisé et l'espace métrique associé est complet.

Il est facile de vérifier que :

• Γ est compact si et seulement si il est quasi-compact et complet.

• Γ est compact si et seulement si S est fini et $A = A_c$.

• Un graphe fini est complet si et seulement si les éléments de $A \setminus A_c$ sont de longueur ∞.

1.2. Cohomologie

Soient Γ un graphe orienté ayant un nombre fini de composantes connexes et L un groupe abélien.

1.2.1. Cohomologie et cohomologie à support compact. — On dispose des groupes de cohomologie $H^i(\Gamma, L)$, pour $i = 0, 1$, et de cohomologie à support compact $H_c^i(\Gamma, L)$, pour $i = 0, 1$. Alors $\dim_L H^0(\Gamma, L)$ est le nombre de composantes connexes de Γ et $\dim_L H_c^0(\Gamma, L)$ est le nombre de ses composantes connexes compactes.

Les groupes $H^1(\Gamma, L)$ et $H_c^1(\Gamma, L)$ ont une description combinatoire qui va nous être utile. Si $X = A_c, A, S$, on note L^X l'espace des fonctions $\phi : X \to L$ et $L^{(X)}$ le sous-espace de L^X des fonctions à support fini. On dispose d'applications

$$\partial : L^S \to L^{A_c} \quad \text{et} \quad \partial : L^{(S)} \to L^{(A_c)},$$

définies par :

$$\partial\phi(a) = \phi(s_2(a)) - \phi(s_1(a)).$$

Alors

$$H^1(\Gamma, L) = \text{Coker}\big[\partial : L^S \to L^{A_c}\big] \quad \text{et} \quad H^1_c(\Gamma, L) = \text{Coker}\big[\partial : L^{(S)} \to L^{(A)}\big].$$

Remarque 1.2. — (o) Si Γ est compact, alors $H^1_c(\Gamma, L) = H^1(\Gamma, L)$.

(i) Si A ne contient pas d'arête sans extrémité, alors S rencontre toutes les composantes connexes de Γ et $H^0(\Gamma, L) = \text{Ker}\big[\partial : L^S \to L^{A_c}\big]$, et si A ne contient pas de cercle, alors S rencontre toutes les composantes connexes compactes, et $H^0_c(\Gamma, L) = \text{Ker}\big[\partial : L^{(S)} \to L^{(A)}\big]$.

(ii) Si S est fini, la restriction à A_c d'une fonction sur A induit une suite exacte :

$$0 \to H^0_c(\Gamma, L) \to H^0(\Gamma, L) \to L^{A\setminus A_c} \to H^1_c(\Gamma, L) \to H^1(\Gamma, L) \to 0.$$

En particulier, si Γ est connexe et non compact (et S fini), on a une suite exacte :

$$0 \to L \to L^{A\setminus A_c} \to H^1_c(\Gamma, L) \to H^1(\Gamma, L) \to 0.$$

1.2.2. L'opérateur ∂^*. — Comme Γ est supposé localement fini, on dispose d'applications

$$\partial^* : L^A \to L^S \quad \text{et} \quad \partial^* : L^{(A)} \to L^{(S)},$$

définies par

$$\partial^*\phi(s) = \sum_{a\in A(s)^+} \phi(a) - \sum_{a\in A(s)^-} \phi(a).$$

Les espaces L^S et L^A sont les duaux de $L^{(S)}$ et $L^{(A)}$, et ∂^* est l'adjoint de ∂. Il s'ensuit que :

$$\text{Ker}\big[\partial^* : L^A \to L^S\big] = H^1_c(\Gamma, L)^*.$$

Remarque 1.3. — Si $s \in S$, notons $\partial^*_s : L^{A(s)} \to L^{\{s\}}$ la restriction de ∂^*. Comme $L^A = \text{Ker}\big[\prod_s L^{A(s)} \to L^{A_c}\big]$ (car $a \in A_c$ apparaît dans exactement deux $A(s)$), on a aussi

$$H^1_c(\Gamma, L)^* = \text{Ker}\big[\prod_s \text{Ker}\big[\partial^*_s : L^{A(s)} \to L^{\{s\}}\big] \to L^{A_c}\big].$$

1.2.3. Graphes bipartites marqués. — A partir d'un graphe semi-métriśe $\Gamma = (S, A, \mu)$, on peut fabriquer un nouveau graphe $\Gamma^{(2)} = (I, I_2, \mu)$ en rajoutant un sommet sur chaque arête relativement compacte (ce qui découpe l'arête en deux), et en donnant au nouveau point une multiplicité égale à $\mu(a)$; la structure obtenue est appelée un graphe bipartite marqué (bipartite car les sommets sont de deux types possibles : des sommets standard et des sommets de valence 2 munis d'une multiplicité). Les ensembles I des sommets, I_2 des arêtes et $I_{2,c}$ des arêtes relativement compactes de $\Gamma^{(2)}$ sont donnés par

$$I = A_c \sqcup S, \quad I_2 = \{(a, s),\ a \in A,\ s \in S(a)\} \quad I_{2,c} = \{(a, s),\ a \in A_c,\ s \in S(a)\}.$$

On a $I_2 = I_{2,c} \sqcup (A \setminus A_c)$.

Remarque 1.4. — (0) La construction ci-dessus peut s'inverser et permet de construire un graphe semi-métrisé à partir d'un graphe bipartite marqué.

(i) Le graphe $\Gamma^{(2)}$ possède une orientation naturelle : toute arête de $\Gamma^{(2)}$ a exactement une extrémité appartenant à S, et on prend cette extrémité comme origine.

(ii) Le graphe $\Gamma^{(2)}$ est, topologiquement, homéomorphe à Γ, et donc à même cohomologie. Il s'ensuit que les complexes naturels $K^I \to K^{I_{2,c}}$ et $K^{I_2} \to K^I$ calculent aussi la cohomologie de Γ.

1.2.4. Monodromie. — Si Γ est métrisé ou semi-métrisé, et si $\mu(a) \in \mathbb{Q}$ pour tout $a \in A_c$, on définit un opérateur de monodromie,

$$N_\mu : H^1_c(\Gamma, L)^* \to H^1(\Gamma, L)$$

en prenant la composée de $\mu : K^A \to K^{A_c}$, qui envoie ϕ sur la restriction à A_c de $(a \mapsto \mu(a)\phi(a))$, et de l'application naturelle $K^{A_c} \to H^1(\Gamma, L)$.

Remarque 1.5. — Si Γ est compact et métrisé, alors N_μ est un isomorphisme.

Remarque 1.6. — Soit M un Λ-module admettant $H^1_c(\Gamma, \Lambda)^*$ comme quotient et $H^1(\Gamma', \Lambda)$ comme sous-objet, où Γ' est un sous-graphe de Γ. Alors M est naturellement muni d'un opérateur de monodromie N défini comme la composée :

$$M \to H^1_c(\Gamma, \Lambda)^* \xrightarrow{N_\mu} H^1(\Gamma, \Lambda) \to H^1(\Gamma', \Lambda) \to M,$$

où les flèches autres que N_μ sont les flèches évidentes. Si l'image de $H^1(\Gamma', \Lambda)$ dans $H^1_c(\Gamma, \Lambda)^*$ est nulle, alors N est nilpotent d'exposant 2 (i.e. $N \circ N = 0$).

2. Courbes analytiques

Soit C un corps algébriquement clos, complet pour une valuation v_p (à valeurs réelles) vérifiant $v_p(p) = 1$. Le but de ce chapitre est de rappeler rapidement les principaux résultats concernant la structure des courbes analytiques sur C. Nous renvoyons le lecteur à [1], [3], [20] pour plus de détails et les preuves des résultats énoncés ci-dessous.

Une courbe analytique (ou simplement courbe) est un espace rigide analytique séparé, purement de dimension 1 et lisse (sur le corps de base). L'espace de Berkovich associé à une courbe sur C est une courbe C-analytique quasi-lisse au sens de [20] (une telle courbe peut donc avoir un bord non vide). Pour simplifier, nous supposerons sans mention explicite du contraire que les courbes sont connexes. Si K est un sous-corps fermé de C, une telle courbe Y est dite définie sur K si elle est obtenue, par extension des scalaires, à partir d'une K-courbe Y_K.

2.1. Structure globale d'une courbe

Une C-courbe analytique est soit propre (auquel cas c'est l'espace analytique associé à une courbe projective), soit une réunion croissante d'affinoïdes de dimension 1 et même une réunion croissante stricte (chaque affinoïde est inclus dans l'intérieur du suivant) si la courbe est sans bord (et non propre).

Plus généralement et plus précisément, soit K un sous-corps fermé de C et soit X un K-espace analytique séparé, de dimension 1 (non nécessairement lisse).

• Si X est quasi-compact et irréductible, alors X est affinoïde ou projectif, i.e. l'analytifié d'une courbe algébrique projective sur K [25, th.2]. Du point de vue de la théorie de Berkovich, toute courbe analytique compacte (en tant qu'espace topologique) et irréductible X est isomorphe à un domaine analytique d'une courbe projective, et X est affinoïde si et seulement si le bord de X est non vide [20, th. 6.1.3, cor. 6.1.4].

• Si X est quasi-compact et purement de dimension 1, on peut décrire les affinoïdes de X comme suit. Si f est une fonction méromorphe globale sur X, notons U_f l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels f est analytique au voisinage de x et vérifie $|f(x)| \leq 1$. Tout affinoïde U de X est de la forme U_f [25, th.3] et, si $X = Y^{\mathrm{an}}$ pour une courbe algébrique projective Y, f peut être choisie rationnelle sur Y. Si de plus Y est connexe et régulière [16] et si f est une fonction rationnelle, mais pas régulière sur Y tout entier, alors U_f est un affinoïde [25, prop 2, p.168].

Supposons de plus que X est connexe. Alors X est paracompact (i.e. possède un recouvrement affinoïde localement fini), en particulier X est une réunion dénombrable croissante d'affinoïdes, cf. [38] et [20, th. 4.5.10]. Plus précisément, le résultat principal de [38] montre que X possède un modèle formel $\mathfrak{X}$ plat, séparé et localement de type fini sur $\mathscr{O}_K$, et $\mathfrak{X}$ possède un recouvrement localement fini par des ouverts affines. De plus :

• Si X est lisse, on peut imposer à $\mathfrak{X}$ d'être semi-stable, i.e. les singularités de la fibre spéciale sont nodales.

• Si X est lisse, rappelons que X est dit quasi-Stein s'il possède un recouvrement affinoide admissible croissant $(X_n)_{n\geq 1}$ tel que les flèches de restriction $\mathscr{O}_X(X_{n+1}) \to \mathscr{O}_X(X_n)$ aient une image dense pour tout n. Si X_n est relativement compact dans X_{n+1} pour tout n, l'espace est dit Stein. De plus, si X est Stein et lisse les composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$ sont propres.

Enfin, tout affinoïde connexe, de dimension 1 et lisse sur C est un domaine affinoïde d'une courbe propre et lisse, et s'obtient en retirant une famille finie de disques ouverts, deux à deux disjoints, de cette courbe [48] (voir aussi la prop. 3.15).

2.2. Affinoïdes

2.2.1. Algèbres de Tate. — Soient K un sous-corps fermé de C, d'anneau des entiers $\mathscr{O}_K$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_K$ et de corps résiduel k_K. Si Y est un affinoïde sur K, on note :

16. Sans cette hypothèse de régularité le résultat qui suit tombe en défaut.

• $\mathscr{O}^+(Y)$ le sous-anneau de $\mathscr{O}(Y)$ des fonctions à valeurs entières, i.e. de norme spectrale ≤ 1.

• $\mathscr{O}^{++}(Y)$ l'idéal $\mathfrak{m}_C \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}^+(Y)$ de $\mathscr{O}^+(Y)$, i.e. l'idéal des fonctions de norme spectrale < 1.

• $\mathscr{O}(Y)^{**}$ le sous-groupe $1 + \mathscr{O}^{++}(Y)$ de $\mathscr{O}(Y)^*$.

Si Y est un affinoïde réduit sur K et si K est de valuation discrète ou bien algébriquement clos, alors $\mathscr{O}^+(Y)$ est une algèbre de Tate sur $\mathscr{O}_K$, i.e. une algèbre de la forme $\mathscr{O}_K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/I$, où I est un idéal de type fini, $\mathscr{O}_K$-saturé. Cela résulte du théorème de finitude de Grauert-Remmert-Gruson [39, th. 3.1.17] et du théorème de Gruson-Raynaud [39, th. 3.2.1].

Lemme 2.1. — Si $f \in \mathscr{O}(Y)^{**}$, alors $\log f \in \mathscr{O}(Y)$.

Démonstration. — On peut écrire $f = 1 + g$ avec $g \in \mathscr{O}^{++}(Y)$, et alors $\log f = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} g^n$, et la série converge dans $\mathscr{O}(Y)$. □

2.2.2. Bord, frontière, cercles fantômes et résidus. — Soit Y un affinoïde sur C. La k_C-algèbre $\mathscr{O}(\mathscr{Y}) := \mathscr{O}^+(Y)/\mathscr{O}^{++}(Y) = \mathscr{O}^+(Y) \otimes_{\mathscr{O}_C} k_C$ est de type fini sur k_C (cela résulte du lemme de normalisation de Noether et de [39, th. 3.1.17]). On appelle $\mathscr{Y} := \mathrm{Spec}(\mathscr{O}(\mathscr{Y}))$ la réduction canonique de Y. L'application de réduction $r : Y \to \mathscr{Y}$ est surjective et anticontinue [17] et la fibre de r en tout point maximal de $\mathscr{Y}$ est un singleton. L'image inverse de l'ensemble des points maximaux (i.e. points génériques des composantes irréductibles) de $\mathscr{Y}$ est le bord de Shilov de Y, i.e. le plus petit fermé de Y sur lequel toute fonction $|f|$ ($f \in \mathscr{O}(Y)$) atteint son maximum. Si Y est réduit et si U est un ouvert affine de $\mathscr{Y}$, le tube $]U[= r^{-1}(U)$ de U est un affinoïde de Y et sa réduction canonique s'identifie à U [24, lemma 4.8.1].

Soit Y un affinoïde lisse, de dimension 1 sur C. Alors $\mathscr{Y}$ est une courbe affine sur k_C (en général ni lisse, ni irréductible) sans multiplicités. Le bord ∂Y de Y (vu comme espace de Berkovich) coïncide avec le bord de Shilov de Y et est en bijection avec l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathscr{Y}$: si $s \in \partial Y$, la composante irréductible $\mathscr{Y}_s$ qui lui correspond est affine et définit une valuation (de Gauss) v_s sur $\mathscr{O}(Y)$, et donc un point de type 2 de l'espace de Berkovich associé à Y.

Si $s \in \partial Y$, on associe à s un ensemble $A_0(s)$ (qui sera un ensemble d'arêtes de sommet s quand on aura défini le graphe dual de la fibre spéciale de Y). Cet ensemble est en bijection avec les points de $\overline{\mathscr{Y}}_s \setminus \mathscr{Y}_s$, où $\overline{\mathscr{Y}}_s$ est la compactifiée de la courbe $\mathscr{Y}_s$ par des points lisses. Si $a \in A_0(s)$, on lui associe :

• un point P_a de $\overline{\mathscr{Y}}_s \setminus \mathscr{Y}_s$,

• une valuation $v_{s,a}$ de rang 2 sur $\mathscr{O}(Y)$ par $v_{s,a}(f) = (v_s(f), v_{P_a}(\alpha^{-1}f))$, où $\alpha \in C$ vérifie $v_p(\alpha) = v_s(f)$.

17. On considère ici Y comme espace de Berkovich, pas comme espace rigide analytique.

Si $\omega \in \Omega^1(Y)$, et si $a \in A_0(s)$, on définit le résidu $\mathrm{Res}_a(\omega)$ comme le résidu de la restriction de ω à $Y_{a,s}$ (i.e. le coefficient α_0 dans le développement $\omega_{|Y_{a,s}} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k T^k \frac{dT}{T}$). On a $\sum_{s\in\partial Y}\sum_{a\in A_0(s)} \mathrm{Res}_a(\omega) = 0$.

Remarque 2.2. — (i) Comme $P_a \notin \mathscr{Y}_s$, si $a \in A_0(s)$, la valuation $v_{s,a}$ n'est pas totalement positive sur $\mathscr{O}^+(Y)$ et $v_{s,a}$ est un point (de type 5) du bord

$$\partial Y^{\mathrm{ad}} = \mathrm{Spa}\big(\mathscr{O}(Y), \mathscr{O}_C + \mathscr{O}^{++}(Y)\big) \setminus \mathrm{Spa}\big(\mathscr{O}(Y), \mathscr{O}^+(Y)\big)$$

de l'espace adique associé à Y.

(ii) Si $T \in \mathrm{Fr}(\mathscr{O}(Y))$ vérifie $v_{s,a}(T) = (0,1)$, l'anneau des entiers du complété de $\mathrm{Fr}(\mathscr{O}(Y))$ pour $v_{s,a}$ est $\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle$. Le schéma formel $Y_{a,s}$ associé est un 404 cercle fantôme 404, obtenu en 404 retirant 404 tous les points visibles du cercle $\mathrm{Sp}(C\langle T, T^{-1}\rangle)$.

On définit la frontière $\partial^{\mathrm{ad}}Y$ de Y comme la réunion [18] des cercles fantômes $Y_{s,a}$, pour $s \in \partial Y$ et $a \in A_0(s)$. L'application $v_{s,a} \mapsto Y_{s,a}$ fournit une bijection de ∂Y^{ad} sur l'ensemble de ces cercles fantômes, et la frontière peut aussi être vue comme le 404 bord adique 404 de Y.

(iii) Il y a (au moins) deux manières de se représenter une courbe p-adique : soit comme un graphe (à la Berkovich ou à la Huber), soit comme une surface de Riemann. Dans ce texte, nous allons privilégier la seconde représentation et construire des courbes en recollant des affinoïdes et des couronnes le long de cercles fantômes. Cette opération ne semble pas être licite dans les cadres classiques (rigide, Berkovich, adique, ou schéma formel); pour lui donner un sens, la solution est de modifier un peu la structure de schéma formel p-adique en munissant la fibre spéciale d'une topologie proche de celle de Berkovich au lieu de la topologie de Zariski ; cela mène à la géométrie adoque [19] du § 3.1. La même opération dans le cadre adique revient à recoller des graphes en des points (de type 5), ce qui peut donner l'impression qu'il y a une unique manière de faire le recollement, alors que le point de vue des surfaces de Riemann suggère une analogie avec la théorie de Teichmüller, qui semble plus proche de la réalité.

2.3. Modèles semi-stables des courbes analytiques

[20, 3, 45]. Soit X une C-courbe analytique (lisse et connexe).

2.3.1. Bord et frontière. — Si X n'est pas propre, alors X est la réunion croissante d'affinoïdes Y_n. On définit le bord ∂X de X comme la limite $\cup_n\big(\cap_{k\geq n}\partial Y_k\big)$ des ∂Y_n, et la frontière $\partial^{\mathrm{ad}}X$ de X comme la limite des $\partial^{\mathrm{ad}}Y_n$. (Notons que des points de ∂Y_n peuvent ne pas faire partie du bord de Y_{n+1} et donc pas non plus de ∂X.)

2.3.2. Noeuds. — Rappelons que les points de X se répartissent en 4 types [20, 3.3.2] suivant la forme de leur corps résiduel complété. Si $Y \subset X$, on note $Y_{[i]}$ l'ensemble de ses points de type $i \in \{1,2,3,4\}$. On note aussi $Y_{[2,3]} = Y_{[2]} \cup Y_{[3]}$, etc. En particulier $X_{[1]} = X(C)$ est l'ensemble des points rigides de X, et pour tout $x \in X_{[2]}$ le corps résiduel de $C(x)$ (corps

18. Que l'on peut voir comme contenue dans la courbe adoque associée à Y, voir n° 3.1.4.
19. Interpolation entre adique et ad hoc...

résiduel complété de x) est le corps des fonctions d'une courbe projective lisse sur k_C, appelée courbe résiduelle en x. Le genre de $x \in X_{[2]}$ est alors le genre de cette courbe résiduelle.

On dit que x est un noeud de X s'il ne possède pas de voisinage qui est une couronne ouverte. Cela inclut les points de type 2 et de genre ≥ 1 et les points du bord ∂X de X. On note $\Sigma(X)$ l'ensemble des noeuds de X.

2.3.3. Squelette analytique. — Soit X une courbe sur C (lisse et connexe). Le squelette analytique de X est l'ensemble $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ des points de X n'ayant pas de voisinage qui est un disque ouvert ; c'est un sous-graphe fermé de X, localement fini et métrisé, composé de points de type 2 ou 3 [20, 5.1.11]. L'ensemble des noeuds $\Sigma(X)$ de X est une partie de $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$, que l'on prend comme ensemble des sommets de $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$. On note $A^{\mathrm{an}}(X)$ (resp. $A_c^{\mathrm{an}}(X)$) l'ensemble des arêtes (resp. arêtes relativement compactes) de $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$.

Remarque 2.3. — (i) Si X est compacte en tant qu'espace de Berkovich, alors $\Gamma^{\mathrm{an}}(X) = \varnothing$ si et seulement si $X \cong \mathrm{P}^1$ [20, 5.4.16]. Sans hypothèse de compacité l'énoncé tombe en défaut, par exemple A^1 et les disques ouverts ont aussi un squelette analytique vide. (Sur un corps assez gros, i.e. sphériquement complet et à groupe de valuation R, ce sont les seuls exemples mais sur un corps non sphériquement complet, le complémentaire d'un point de type 4 dans P^1 n'est pas de ce type, et il y a même des exemples de telles courbes qui ne se plongent pas dans P^1 sur C bien qu'elles se plongent dans P^1 sur un corps assez gros [37, prop. 5.5].)

(ii) Si $\Gamma^{\mathrm{an}}(X) \neq \varnothing$, alors $\Sigma(X) = \varnothing$ si et seulement si X est une couronne ouverte généralisée [20] auquel cas $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ est un segment ouvert, ou bien X est une courbe de Tate auquel cas $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ est un cercle.

(iii) Si $\Gamma^{\mathrm{an}}(X) \neq \varnothing$ et si X n'est pas une courbe de Tate, les arêtes de $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ correspondent à des sous-couronnes ouvertes généralisées de X, la longueur de l'arête étant la largeur de la couronne correspondante. Plus précisément :

- ◇ une arête de longueur finie correspond à une couronne ouverte $\alpha < v_p(z) < \beta$ généralisée [21] dont la largeur est $\beta - \alpha$.
- ◇ une demi-droite correspond à un disque ouvert épointé (de largeur ∞ car $\beta = +\infty$),
- ◇ une droite correspond à G_m (de largeur 2∞ car $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$).

(iv) Si $\Gamma^{\mathrm{an}}(X) \neq \varnothing$, alors $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ est compact si et seulement si X est un affinoïde ou une courbe propre. En effet, $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ est un sous-graphe analytiquement admissible [20, th. 5.1.11], donc admissible de X (cf. [20, 1.5.1,5.1.3] pour ces notions) et donc la rétraction canonique [22] $r : X \to \Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ est continue et compacte [20, th. 1.5.16]. Donc $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ est compact si et seulement si X l'est (en tant qu'espace de Berkovich) et on conclut en utilisant les résultats énoncés dans 2.1.

---

20. Une couronne ouverte généralisée est une courbe qui, après extension des scalaires à un corps assez gros, devient une couronne ouverte ou un disque ouvert épointé ou G_m.

21. Si l'arête appartient à $A_c^{\mathrm{an}}(X)$, on obtient une vraie couronne et $\beta - \alpha \in \mathrm{Q}$.

22. Si $x \notin \Gamma^{\mathrm{an}}(X)$, $r(x)$ est l'unique point du bord de la composante connexe de x dans $X \setminus \Gamma^{\mathrm{an}}(X)$.

On définit le squelette adique $\Gamma^{\mathrm{ad}}(X)$ en rajoutant à $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ des arêtes non relativement compactes de longueur 0^+ en les sommets s de ∂X, une par cercle fantôme de $\partial^{\mathrm{ad}}X$ au bord de s.

2.3.4. Triangulations. — Une pseudo-triangulation S de X est un sous-ensemble discret et fermé de X, formé de points de $X_{[2]}$, tel que les composantes connexes de $X \setminus S$ soient des disques ouverts ou des couronnes ouvertes généralisées. Le squelette $\Gamma(S)$ de S est le sous-graphe fermé de X tracé sur $X_{[2,3]}$, ayant pour sommets S et pour arêtes les squelettes des composantes connexes de $X \setminus S$. On définit le squelette adique $\Gamma^{\mathrm{ad}}(S)$ en rajoutant à $\Gamma(S)$ des arêtes non relativement compactes de longueur 0^+ en les sommets s de ∂X, une par cercle fantôme de $\partial^{\mathrm{ad}}X$ à la frontière de s.

On dit que X est compacte (resp. quasi-compacte, resp. complète), si $\Gamma^{\mathrm{ad}}(S)$ est un espace métrique compact (resp. espace quasi-compact, resp. espace métrique complet), pour toute pseudo-triangulation S.

Remarque 2.4. — (i) Les courbes compactes sont les analytifiées des courbes algébriques propres.

(ii) Les courbes connexes quasi-compactes mais non compactes sont les affinoïdes connexes.

En effet, pour les deux assertions il suffit de raisonner comme dans la preuve du point iv) de la rem. 2.3, en utilisant la rétraction canonique de X sur $\Gamma(S)$.

(iii) Une courbe compacte est complète, mais on peut fabriquer des courbes complètes non compactes : par exemple, en retirant un nombre fini de points à une courbe compacte ou, plus généralement, un sous-ensemble compact (comme pour le demi-plan de Drinfeld), ou en prenant un revêtement fini étale d'une courbe complète non compacte.

Une triangulation de X est une pseudo-triangulation telle que les composantes connexes de $X \setminus S$ soient relativement compactes dans X (en particulier, ce sont des disques ou de vraies couronnes et pas des disques épointés ou des G_m).

Si S est une pseudo-triangulation de X, alors S contient $\Sigma(X)$. Si $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ est compact, et si $\Sigma(X) \neq \varnothing$, alors $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ est une triangulation de X, plus précisément la plus petite triangulation de X [20, 5.4.12]. Si $A^{\mathrm{an}}(X) \neq A_c^{\mathrm{an}}(X)$, pour construire une triangulation on a besoin de subdiviser les arêtes non relativement compactes de $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ en une infinité d'arêtes, et donc de rajouter une infinité de sommets à $\Sigma(X)$.

Remarque 2.5. — (i) Un résultat fondamental de la théorie est l'existence de triangulations pour toute courbe analytique sur C. C'est une conséquence du théorème de réduction semi-stable (cf. [1, ch.1]), mais peut aussi se démontrer "directement", par une étude de la structure locale des courbes [20, th. 5.1.4]. Plus précisément, tout ensemble fermé et discret, constitué de points de type 2 est contenu dans une triangulation de X. Si X est compacte (en tant qu'espace de Berkovich), alors la réunion des squelettes des triangulations de X est $X_{[23]}$ et X est homéomorphe à la limite inverse de ces squelettes.

(ii) Une triangulation de X permet de découper X en shorts et jambes (cf. n° 3.5.2 pour une version précise), ce qui permet de décrire X à partir d'objets plus simples.

(iii) Si X est partiellement propre, une pseudo-triangulation fournit un recouvrement de X par des pantalons (cf. n° 8.4.1), qui permet aussi de décrire X à partir d'objets plus simples.

(iv) Ces deux descriptions de courbes analytiques joueront un grand rôle dans le calcul de leurs cohomologies. Pour éviter de se battre avec la combinatoire du recouvrement, il est souvent utile de raffiner la pseudo-triangulation.

On dit qu'une pseudo-triangulation S est fine si $\Gamma(S)$ ne contient pas de boucle avec 1 ou 2 sommets. On peut rendre fine n'importe quelle triangulation S en rajoutant un sommet au milieu de toutes les arêtes de $\Gamma(S)$ (et donc en coupant chaque arête en deux).

2.3.5. Triangulations et modèles semi-stables. — Il y a une bijection naturelle ([3, th. 4.11] pour les courbes projectives, [1, ch. 1] et [20, ch. 6] dans le cas général) entre les triangulations de X et les modèles formels (p-adiques) semi-stables [23] de X sur $\mathscr{O}_C$: si $\mathscr{X}$ est un tel modèle, l'ensemble $S(\mathscr{X})$ des préimages (par la spécialisation) dans X des points génériques des composantes irréductibles de la fibre spéciale classique $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{X}$ de $\mathscr{X}$ est une triangulation de X. Pour aller dans l'autre sens il faut se fatiguer un peu plus ([20, th 6.3.15] ou [1, ch1]), mais au moins pour une courbe projective X et dans le cas où le squelette $\Gamma(S)$ de la triangulation a au moins deux arêtes la construction est assez explicite [3, th 4.11] : si $r : X \to \Gamma(S)$ est la retraction canonique, et si a est une arête, alors $r^{-1}(\overline{a})$ est un domaine affinoïde de X, et le modèle semi-stable correspondant s'obtient en recollant les $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}^+(r^{-1}(\overline{a})))$ le long des $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}^+(r^{-1}(s)))$, s parcourant S.

Remarque 2.6. — Soient S une triangulation de X et X_S le modèle semi-stable associé.

(i) $\Gamma(S)$ est le graphe dual de $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} X_S$: les sommets de $\Gamma(S)$ correspondent aux composantes irréductibles de $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} X_S$ et les arêtes aux points singuliers. Si $\mathscr{Y}_s$ est la composante irréductible correspondant à $s \in S$, on note Z_s l'image inverse de $\mathscr{Y}_s$ par l'application de spécialisation et Y_s l'image inverse de l'ouvert de lissité de $\mathscr{Y}_s$ (i.e. $\mathscr{Y}_s$ privé des points communs avec les autres composantes de $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} X_S$). Si P_a est le point singulier correspondant à l'arête a, on note Y_a l'image inverse de P_a ; c'est une couronne ouverte dont on note $\mu(a)$ la largeur.

(ii) S contient ∂X puisqu'elle contient $\Sigma(X)$; par la bijection ci-dessus entre éléments de S et composantes irréductibles, les points de ∂X correspondent aux composantes irréductibles de $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} X_S$ qui ne sont pas propres.

2.4. Fibre spéciale d'une courbe quasi-compacte

Soit X une courbe quasi-compacte (lisse et connexe) sur C, et soient S une triangulation de X et X_S le modèle semi-stable sur $\mathscr{O}_C$ associé. La courbe $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} X_S$ est un invariant un peu trop grossier : on veut garder la trace de la largeur des couronnes correspondant aux points singuliers, ce qui amène naturellement à la notion de courbe marquée ci-dessous.

23. Au sens large, i.e. étale localement, de la forme $\mathrm{Spf}\, \mathscr{O}_C\{X,Y\}/(XY-a)$, $a \in \mathscr{O}_C \setminus \{0\}$.

2.4.1. Courbes marquées. — Soit X une courbe sur k_C. Un point marqué sur X est un couple $(P, \mu(P))$, où :

- $P \in X(k_C)$,
- la multiplicité $\mu(P)$ de P est un élément de $\mathbf{Q}_+^* \sqcup \{0^+\}$.

Une courbe marquée (X, A, μ) est une courbe X munie d'un ensemble A de points marqués (et μ est la fonction associant à un point marqué sa multiplicité). Une courbe marquée (X, A, μ) est semi-stable si :

- X est à singularités nodales,
- les composantes irréductibles de X sont propres et ne comportent qu'un nombre fini de points marqués,
- les points singuliers de X sont marqués et ont une multiplicité $\in \mathbf{Q}_+^*$, les points marqués non singuliers ont multiplicité 0^+.

Elle est stable si elle est semi-stable et si, de plus, aucune composante connexe de X n'est un $\mathbf{P}^1$ avec 0, 1 ou 2 points marqués.

Remarque 2.7. — (i) On peut considérer une courbe lisse X comme une courbe marquée stable en lui associant la courbe marquée stable $(\overline{X}, \overline{X} \setminus X, 0^+)$, où $\overline{X}$ est la compactification lisse de X et tous les éléments de $\overline{X} \setminus X$ sont de multiplicité 0^+.

(ii) Plus généralement, une courbe X à singularités nodales, dont les points singuliers sont munis d'une multiplicité $\in \mathbf{Q}_+^*$, peut être considérée comme une courbe marquée semi-stable : on considère la compactifiée $\overline{X}$ de X obtenue en rajoutant des points lisses, et on définit l'ensemble des points marqués comme la réunion des points singuliers de X (avec la multiplicité donnée) et des points de $\overline{X} \setminus X$, de multiplicité 0^+.

(iii) Si X est une courbe analytique et si S est une triangulation de X, la courbe $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} X_S$ est une courbe à singularités nodales dont les points singuliers sont naturellement munis d'une multiplicité rationnelle, à savoir la largeur de la couronne correspondante. On transforme cette courbe en courbe marquée semi-stable en utilisant le (ii).

Si X est une courbe analytique et si S est une triangulation fine de X, la fibre spéciale X_S^{sp} de X_S est la courbe marquée semi-stable obtenue à partir de $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} X_S$ par le procédé du (iii) de la rem. 2.7.

- Ses composantes irréductibles sont en bijection avec les éléments de S ; on note Y_s^{sp} la composante irréductible associée à s (c'est, par construction, une courbe propre sur k_C et on note $\overset{\circ}{Y}{}_s^{\mathrm{sp}}$ le complémentaire dans Y_s^{sp} des points marqués).
- Ses points singuliers sont en bijection avec les arêtes de $\Gamma(S)$; on note P_a le point correspondant à a ; c'est un point marqué de X_S^{sp} de multiplicité $\mu(a)$ (largeur de la couronne correspondante).
- Les autres points marqués de X_S^{sp} sont de multiplicité 0^+ et leur ensemble est le complémentaire de $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} X_S$ dans X_S^{sp}.

2.4.2. Graphe dual d'une courbe marquée. — Si X est une courbe marquée, on lui associe un graphe semi-métrisé $\Gamma(X) = (S, A, \mu)$, le graphe dual de X, défini de la manière suivante :

• S est en bijection avec l'ensemble des composantes irréductibles de X.

• A est en bijection avec les points marqués de X, la longueur d'une arête a étant la multiplicité du point P_a correspondant [24].

• Les arêtes relativement compactes de $\Gamma(X)$ sont en bijection avec les points marqués singuliers de X, les extrémités de l'arête a_P correspondant à P étant les sommets correspondant aux composantes irréductibles contenant [25] P.

• Les arêtes non relativement compactes de $\Gamma(X)$ sont en bijection avec les points marqués de multiplicité 0^+, l'extrémité de l'arête a_P correspondant à P étant le sommet correspondant à la composante irréductible contenant P.

Remarque 2.8. — Si X est une courbe analytique et si S est une triangulation fine de X, alors

$$\Gamma(X_S^{\mathrm{sp}}) = \Gamma^{\mathrm{ad}}(S).$$

2.5. Métrique canonique et valuation. — L'espace $X_{[2,3]}$ des points de type 2 ou 3 est naturellement muni d'une métrique dt qui permet de métriser tout sous-graphe : la distance associée est définie par $d(r,s) = \inf\left|\int_r^s dt\right|$, le minimum étant pris sur tous les chemins joignant r à s. Si $C \subset X$ est une couronne fermée (i.e. $C \cong \{\alpha \leq v_p(z) \leq \beta\}$), et si r et s sont les valuations de Gauss des cercles $v_p(z) = \alpha$ et $v_p(z) = \beta$ aux extrémités de la couronne, alors $d(r,s)$ est la largueur $\beta - \alpha$ de la couronne. Cette distance envoie les points de type 1 à l'infini (i.e. elle les transforme en pointes, comme les éléments de R pour la métrique de Poincaré sur le demi-plan de Poincaré).

Si $f \in C(X)^*$, si $r, s \in X_{[2,3]}$ et si $v_r, v_s \in X_{[2,3]}$ sont les valuations correspondantes sur $C(X)$, alors

$$v_s(f) - v_r(f) = \int_r^s \mathrm{Res}_t\left(\tfrac{df}{f}\right) dt,$$

l'intégrale étant prise sur n'importe quel chemin allant de r à s : un tel chemin est une réunion finie de segments fermés et la fonction $\mathrm{Res}\left(\frac{df}{f}\right)$ est constante sur l'intérieur d'un tel segment ; cet intérieur correspond à une couronne ouverte de X, ses points sont les points de Gauss de cercles virtuels, et le sens de parcours du segment pour aller de r à s détermine une orientation de la couronne, ce qui fixe le signe du résidu de $\frac{df}{f}$.

Si X est un affinoïde, et $r \in X$ est un point de type 2, on pose $d(r, \partial X) = \inf_{s \in \partial X} d(r,s)$, si X est la réunion croissante d'affinoïdes X_n, on pose $d(r, \partial X) = \lim_{n \in \mathbb{N}} d(r, \partial X_n)$, et si X est propre, on pose $d(r, \partial X) = +\infty$. Si $Z \subset X$ est un affinoïde, on pose $d(Z, \partial X) = \inf_{r \in Z_{[2]}} d(r, \partial X)$.

Proposition 2.9. — Soient X une courbe et $Z \subset X$ un affinoïde connexe. Si $f \in \mathscr{O}^+(X)$, on a $v_Z(f - f(x_0)) \geq d(Z, \partial X)$, pour tout $x_0 \in Z(C)$.

24. Qui peut être 0^+ ce qui fait que $\Gamma(X)$ peut être seulement semi-métrisé et pas métrisé.

25. Ces deux extrémités peuvent être égales si des composantes irréductibles de X s'autointersectent.

Démonstration. — Soit $g = f - f(x_0)$. Il n'y a rien à prouver si $g = 0$ ni si X est propre (car alors $g = 0$). On peut donc supposer X affinoïde (et passer à la limite pour le cas général) et $g \neq 0$. Soit X_g l'ensemble des zéros de g ; c'est un sous-ensemble discret de X. Le squelette analytique Γ de $X \setminus X_g$ est obtenu en rajoutant des demi-droites à $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$, une demi-droite par élément de X_g. La fonction $t \mapsto \mathrm{Res}_t \frac{dg}{g}$ est constante sur chaque arête orientée de Γ.

Soit $r \in \Gamma \cap Z$ réalisant le minimum de $s \mapsto v_s(g)$, et tel qu'il existe une arête de bout r sur laquelle $\mathrm{Res}\frac{dg}{g} \leq -1$: un tel point existe car $v_s(g)$ tend vers $+\infty$ en l'infini de $\Gamma \cap Z$ (en particulier, sur la branche correspondant à x_0) et est croissante sur les arêtes sur lesquelles $\mathrm{Res}\frac{dg}{g} \geq 0$.

Soit γ un chemin maximal, tracé sur Γ, partant de r et le long duquel $\mathrm{Res}\frac{dg}{g} \leq -1$. Alors γ aboutit au bord de $\Gamma^{\mathrm{an}}(X)$: en effet, il ne peut pas aboutir au bout d'une des demi-droites correspondant aux zéros de g puisque $\mathrm{Res}\frac{dg}{g} > 0$ le long de ces demi-droites, et s'il aboutit en un point intérieur, ce point est forcément un noeud r' (puisque $\mathrm{Res}\frac{dg}{g}$ est constant sur les arêtes). Or la somme des résidus de $\frac{dg}{g}$ le long des arêtes arrivant en r' est nulle, et comme il y en a une pour lequel ce résidu est ≤ -1, cela implique qu'il y en a une a pour lequel ce résidu est ≥ 1. Mais, cela fait que le résidu sur a, considérée comme arête sortante, est ≤ -1, ce qui prouve que γ n'est pas maximal puisqu'on peut le prolonger par l'arête a.

La longueur $\mathrm{lg}(\gamma)$ de γ est donc $\geq d(r, \partial X) \geq d(Z, \partial X)$. Par ailleurs, si $s \in \gamma$, alors $v_r(g) - v_s(g) = \int_r^s -\mathrm{Res}\frac{dg}{g}\, dv$ (l'intégrale étant le long de γ). En passant à la limite, en en utilisant le fait que $v_s(g) \geq 0$ puisque $g \in \mathscr{O}^+(X)$ et que $-\mathrm{Res}\frac{dg}{g} \geq 1$, on obtient la minoration $v_Z(g) = v_r(g) \geq \mathrm{lg}(\gamma) \geq d(Z, \partial X)$. □

Corollaire 2.10. — Si Y est complète, toute fonction holomorphe bornée est constante.

Démonstration. — Cela résulte de ce que $d(Z, \partial Y) = +\infty$ si Z est un affinoïde connexe de Y (car Y est supposée complète), et donc $v_Z(f - f(x_0)) = +\infty$, si $x_0 \in Z(C)$ (prop. 2.9) : autrement dit, f est constante sur Z, pour tout Z.

□

Remarque 2.11. — Cela fournit une preuve alternative de l'énoncé de la rem. A.2 de [15].

3. Construction de courbes analytiques

Dans ce chapitre, on explique comment construire des courbes en recollant des shorts (ou plus généralement des affinoïdes) et des jambes (ou des boules ouvertes) le long de cercles fantômes. Pour donner un sens à cette construction nous allons avoir besoin de raffiner la structure de schéma formel associé à une algèbre de Tate, ce qui conduit à la géométrie adoque.

3.1. Géométrie adoque

3.1.1. Affines adoques. — Soit $A = \mathscr{O}_C\langle T_1, \dots, T_n\rangle/I$ une $\mathscr{O}_C$-algèbre de Tate réduite [26], telle que $\overline{A} = k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} A$ soit aussi réduite (typiquement, $A = \mathscr{O}^+(Y)$, où Y est un affinoïde réduit sur C). Le schéma formel p-adique associé $Y = \mathrm{Spf}(A)$ est un espace annelé d'espace topologique sous-jacent la fibre spéciale $Y^{\mathrm{sp}} = \mathrm{Spec}(\overline{A})$, munie de la topologie de Zariski, le faisceau structural étant, si A est normal, $U \mapsto \mathscr{O}^+(]U[)$ où $]U[$ désigne le tube de U sur la fibre générique (c'est un affinoïde sur C) : si U est l'ouvert $f \neq 0$ de Y^{sp}, et si $\tilde{f}$ est un relèvement de f dans A, alors $\mathscr{O}_Y(U) = A\langle X\rangle/(1 - X\tilde{f})$.

Nous allons associer à A un schéma adoque $\mathrm{Sp}^{\mathrm{ado}}(A)$ défini en rajoutant des points et des ouverts à l'espace topologique $\mathrm{Spf}(A)$ et en modifiant le faisceau structural en conséquence. Avant de donner la définition de cet espace, commençons par examiner $\mathrm{Spf}(A)$ du point de vue « points classiques ».

Si K est un corps algébriquement clos, complet pour une valuation réelle, muni d'un morphisme continu $\mathscr{O}_C \to K$, alors $X(K) = \mathrm{Hom}(A, K)$ est un sous-espace fermé de K^n (les $s : A \to K$ que l'on considère sont les morphismes continus de $\mathscr{O}_C$-algèbres). Comme $\mathscr{O}_C$ est de caractéristique mixte, on peut prendre $K = C$ ou $K = C^\flat$ (ou n'importe quel corps vérifiant les conditions ci-dessus et contenant un de ces corps). Alors $X(C)$ est borné dans C^n tandis que $X(C^\flat)$ n'est pas borné dans $(C^\flat)^n$, et $X(C^\flat)$ a beaucoup plus d'ouverts naturels que les complémentaires de sous-variétés algébriques fermées (par exemple, l'intersection avec la boule ouverte unité de $(C^\flat)^n$).

• Les points de $\mathrm{Sp}^{\mathrm{ado}}(A)$.— Les points de l'espace topologique sont ceux de l'espace de Berkovich sur k_C associé à $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} A$ (notons que cet anneau est discret), i.e. les valuations v sur $k_C \otimes_{\mathscr{O}_C} A$ (i.e. $v(xy) = v(x) + v(y)$ et $v(x+y) \geq \inf(v(x), v(y))$) à valeurs dans $\mathbf{Z} \sqcup \{\infty\}$, d'image $\{0, \infty\}$ ou contenant [27] 1 ou -1.

Si v est une telle valuation, $I_v = \{a \in \overline{A},\ v(a) = \infty\}$ est un idéal premier, et v s'étend en une valuation de $\mathrm{Fr}(\overline{A}/I_v)$; on note K_v le complété de $\mathrm{Fr}(\overline{A}/I_v)$ pour v. Alors v est obtenue en composant $\overline{A} \to K_v$ avec la valuation v sur K_v.

Les valuations à valeurs dans $\{0, \infty\}$ correspondent aux éléments de $\mathrm{Spec}(\overline{A})$. Si v est à valeurs dans $\{0, \infty\}$, la valuation induite sur K_v est la valuation triviale (i.e. $v(0) = \infty$ et $v(x) = 0$ si $x \neq 0$).

• La topologie de $\mathrm{Sp}^{\mathrm{ado}}(A)$.— Si $f \in \overline{A}$, on note U_f l'ouvert de Zariski

$$U_f = \{v,\ v(f) < \infty\}.$$

Si $g_1, \dots, g_d \in \overline{A}$, on note $U_{f, g_1, \dots, g_d}$ l'ensemble

$$U_{f, g_1, \dots, g_d} = \{v \in U_f,\ v(g_i) > 0,\ 1 \leq i \leq d\}.$$

---

26. On peut aussi remplacer $\mathscr{O}_C$ par un épaississement pour avoir une théorie « en famille » ; c'est ce qui est fait au paragraphe suivant.

27. Normaliser l'image évite de travailler à équivalence près.

On munit l'espace ci-dessus de la topologie engendrée par les $U_{f,g_1,\dots,g_d}$; un ouvert de cette forme est dit standard ; comme

$$U_{f_1,g_1,\dots,g_r} \cap U_{f_2,g_{r+1},\dots,g_{r+s}} = U_{f_1f_2,g_1,\dots,g_{r+s}},$$

on n'a que les réunions quelconques à rajouter. L'espace obtenu est compact.

• Le faisceau structural.— Si $\tilde{f}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_d \in A$ sont des relèvements de $f, g_1, \dots, g_d$, on pose

$$\overline{A}_{f,g_1,\dots,g_d} = \overline{A}[[T_1,\dots,T_d]][X]/(1-Xf, T_1-g_1,\dots,T_d-g_d),$$
$$A_{f,g_1,\dots,g_d} = A[[T_1,\dots,T_d]]\langle X\rangle/(1-X\tilde{f}, T_1-\tilde{g}_1,\dots,T_d-\tilde{g}_d).$$

(Que $A_{f,g_1,\dots,g_d}$ ne dépende pas des choix de $\tilde{f}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_d$ résulte de ce que, si $h_1, h_2 \in A$ ont même image dans $\overline{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $h_1 - h_2 \in p^r A$.)

Notons que, si $r > 0$ est assez petit, on a

$$A_{f,g_1,\dots,g_d}/p^r \cong (\mathscr{O}_C/p^r)\,\widehat{\otimes}_{k_C}\overline{A}_{f,g_1,\dots,g_d}$$

(Cela résulte de ce que les générateurs de l'idéal définissant A et les coefficients de f et des g_i appartiennent à $\mathscr{O}_{\check{C}} + p^r\mathscr{O}_C$ si r est assez petit car il n'y en a qu'un nombre fini qui ne sont pas divisibles par p.)

Remarque 3.1. — La topologie de $\mathrm{Sp}^{\mathrm{ado}}(A)$ est moins fine que celle de l'espace de Berkovich correspondant (en dimension 1, qui est le seul cas qui va nous intéresser, les deux topologies coïncident si on reste sur k_C mais pas si on étend les scalaires à un corps muni d'une valuation non triviale) et, si $U = U_{f,g_1,\dots,g_r}$ est un ouvert standard, alors $\overline{A}_{f,g_1,\dots,g_r}$ est inclus dans l'anneau des fonctions analytiques sur l'espace de Berkovich associé à U.

On note $\overline{\mathscr{O}}$ et $\mathscr{O}$ les faisceaux associés aux préfaisceaux

$$U_{f,g_1,\dots,g_d} \mapsto \overline{A}_{f,g_1,\dots,g_d} \quad \text{et} \quad U_{f,g_1,\dots,g_d} \mapsto A_{f,g_1,\dots,g_d}.$$

Lemme 3.2. — $\overline{\mathscr{O}}(U_{f,g_1,\dots,g_d}) = \overline{A}_{f,g_1,\dots,g_d}$ et $\mathscr{O}(U_{f,g_1,\dots,g_d}) = A_{f,g_1,\dots,g_d}$.

Démonstration. — Notons juste U l'ouvert standard $U_{f,g_1,\dots,g_d}$ et $\overline{A}$ l'anneau $\overline{A}_{f,g_1,\dots,f_d}$. Soit $F \in \overline{\mathscr{O}}(U)$. Il existe donc, pour tout $v \in U$, un ouvert standard $U(v) = U_{f_v,g_{v,1},\dots,g_{v,d_v}}$ tel que $F_{|U(v)} \in \overline{A}_{f_v,g_{v,1},\dots,g_{v,d_v}}$.

Soient η_i, $i \in I$, les points génériques des composantes irréductibles de $\overline{X} = \mathrm{Spec}(\overline{A})$. Alors $U' = \cup_i U(\eta_i)$ est un ouvert de Zariski de $\overline{X}$ et $f_{|U'}$ appartient à l'anneau total des fractions $\mathrm{Fr}(\overline{A})$ de $\overline{A}$. Par ailleurs f est une fonction analytique sur $\overline{X}^{\mathrm{an}}$ (espace de Berkovich associé à $\overline{X}$); on en déduit que les pôles de F, vu comme élément de $\mathrm{Fr}(\overline{A})$, ne sont qu'apparents, et donc que F se prolonge en une fonction sur X, i.e. $F \in \overline{A}$.

Cela prouve le premier énoncé. Pour en déduire le second, partons de $F \in \mathscr{O}(U)$; il existe alors un recouvrement fini de U par des ouverts standard $U_i = U_{f_i,g_{i,1},\dots,g_{i,d_i}}$ tel que $F_{|U_i} \in A_i = A_{f_i,g_{i,1},\dots,g_{i,d_i}}$. Soit $A_{i,j} = A_{f_if_j,g_{i,1},\dots,g_{i,d_i},g_{j,1},\dots,g_{j,d_j}}$ et soient

$$B = \mathrm{Ker}\big[\oplus_i A_i \to \oplus_{i,j} A_{i,j}\big], \quad \overline{B} = \mathrm{Ker}\big[\oplus_i \overline{A}_i \to \oplus_{i,j}\overline{A}_{i,j}\big]$$

(La flèche $A_i \oplus A_j \to A_{i,j}$ étant $(f_i, f_j) \mapsto f_{i|U_i\cap U_j} - f_{j|U_i\cap U_j}$.) La flèche naturelle $A \to \oplus_i A_i$ (resp. $\overline{A} \to \oplus_i \overline{A}_i$) induit une injection $A \hookrightarrow B$ (resp. $\overline{A} \hookrightarrow \overline{B}$). On cherche à prouver que la première injection est un isomorphisme sachant que la seconde en est un.

Il suffit de prouver l'énoncé modulo p^r, avec $r > 0$ assez petit, car tout est complet pour la topologie p-adique. Le résultat est donc une conséquence des isomorphismes $A/p^r \cong (\mathscr{O}_C/p^r) \otimes_{k_C} \overline{A}$ et $B/p^r \cong (\mathscr{O}_C/p^r) \otimes_{k_C} \overline{B}$. □

Définition 3.3. — (i) Un espace annelé de la forme $\mathrm{Sp}^{\mathrm{ado}}(A)$, avec A une $\mathscr{O}_C$-algèbre de Tate, ou un de ses ouverts standard est un affine adoque. Un schéma adoque est un espace annelé localement isomorphe à un affine adoque.

(ii) Si Y est un affine adoque, on pose $\mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}}) = \mathscr{O}(Y)[\frac{1}{p}]$. On renvoie au § A.4 pour des considérations sur la fibre générique d'un schéma adoque.

3.1.2. Boules ouvertes, jambes, cercles fantômes. — En dimension 1, en prenant le voisinage infinitésimal de points bien choisis, on obtient les affines adoques suivants :

• Cercle fantôme

C'est l'affine adoque Y de fonctions globales $A = \mathscr{O}_C[[T, T^{-1}\rangle$. Alors $\overline{A} = k_C((T))$, et Y ne possède qu'un point (la valuation ord_T), et donc aussi un unique ouvert non vide $\{\mathrm{ord}_T\}$, et on a $\mathscr{O}(\{\mathrm{ord}_T\}) = \mathscr{O}_C[[T, T^{-1}\rangle$.

Les points classiques de Y sont $Y(C) = \varnothing$ et $Y(C^\flat) = \mathfrak{m}_{C^\flat} \setminus \{0\}$. Autrement dit, Y n'a pas de points en caractéristique 0 (d'où son aspect fantôme), mais en caractéristique p on obtient un ouvert de la droite affine analytique (la boule ouverte privée de son centre).

• Boule ouverte adoque

C'est l'espace l'affine adoque Y de fonctions globales $A = \mathscr{O}_C[[T]]$. Alors $\overline{A} = k_C[[T]]$, et Y ne possède que deux points (le point classique $T = 0$ et la valuation ord_T), et deux ouverts non vides $\{\mathrm{ord}_T\}$ et Y. On a $\mathscr{O}(\{\mathrm{ord}_T\}) = \mathscr{O}_C[[T, T^{-1}\rangle$ et $\mathscr{O}_Y(Y) = \mathscr{O}_C[[T]]$. En particulier, Y contient le cercle fantôme $\mathrm{Sp}^{\mathrm{ado}}(\mathscr{O}_C[[T, T^{-1}\rangle)$ comme sous-schéma adoque ouvert.

Les points classiques de Y sont $Y(C) = \mathfrak{m}_C$ et $Y(C^\flat) = \mathfrak{m}_{C^\flat}$. Autrement dit, Y est la boule ouverte unité en caractéristique 0 et en caractéristique p.

• Jambe de longueur r

C'est l'affine adoque Y de fonctions globales $A = \mathscr{O}_C[[T_1, T_2]]/(T_1T_2 - p^r)$. Alors $\overline{A} = k_C[[T_1, T_2]]/(T_1T_2)$, et Y possède trois points : le point classique d'équation $T_1 = T_2 = 0 \in k_C$ et les valuations ord_{T_1} (qui se factorise à travers $\overline{A}/T_2$) et ord_{T_2} (qui se factorise à travers $\overline{A}/T_1$).

Les ouverts non vides sont Y, $\{\mathrm{ord}_{T_1}\}$ et $\{\mathrm{ord}_{T_2}\}$; notons que le seul ouvert contenant 0 est Y.

Le faisceau structural est donné par $\mathscr{O}_Y(Y) = \mathscr{O}_C[[T_1, T_2]]/(T_1T_2 - p^r)$, $\mathscr{O}_Y(\{\mathrm{ord}_{T_i}\}) = \mathscr{O}_C[[T_i, T_i^{-1}\rangle$. Il en résulte que Y contient, comme sous-espaces adoques ouverts, les deux cercles fantômes $Y_i = \mathrm{Sp}^{\mathrm{ado}}(\mathscr{O}_C[[T_i, T_i^{-1}\rangle)$, pour $i = 1, 2$.

En ce qui concerne les points classiques, en caractéristique 0, on obtient la couronne ouverte $0 < v_p(T_1) < r$ (de longueur r) et, en caractéristique p, deux boules unité ouvertes recollées en leurs centres.

3.1.3. La boule unité fermée

C'est l'affine adoque associée à $A = \mathscr{O}_C\langle X\rangle$ (et donc $\overline{A} = k_C[X]$).

• Les points.— L'espace $\mathrm{Sp}^{\mathrm{ado}}(A)$ a trois types de points :

◇ Le point générique, i.e. la valuation triviale sur A ($v(f) = 0$ si $f \neq 0$, $v(0) = \infty$).

◇ Si $a \in k_C$, le point classique correspondant à a, i.e. la valuation définie par $v_a(f) = v_{\mathrm{triv}}(f(a))$, où v_{triv} est la valuation triviale sur k_C.

◇ Si $a \in \mathrm{P}^1(k_C)$, la valuation $f \mapsto \mathrm{ord}_a(f)$, où $\mathrm{ord}_a(f)$ est l'ordre du zéro de f en a (si $a = \infty$, alors $\mathrm{ord}_a(f) = -\deg f$).

Du point de vue points classiques, on a $Y(C) = \mathscr{O}_C$ et $Y(C^\flat) = C^\flat$. Autrement dit, en caractéristique 0 on obtient la boule unité fermée et en caractéristique p, la droite affine.

• La topologie.— Une base d'ouverts de la topologie adoque est donnée par :

◇ les complémentaires de sous-ensembles finis de points classiques..

◇ les $V(a) = \{v_a, \mathrm{ord}_a\}$, pour $a \in k_C$, (voisinage infinitésimal du point a, défini par $\{v,\ v(T-a) > 0\}$),

◇ les $\overset{\circ}{V}(a) = \{\mathrm{ord}_a\}$, pour $a \in \mathrm{P}^1(k_C)$ (si $a \in k_C$, c'est l'intersection de $V(a)$ et de l'ouvert U_{T-a}, et si $a = \infty$, c'est l'ouvert de $U_{T\neq 0}$ défini par $v(T^{-1}) > 0$),

Remarque 3.4. — (i) Le point générique est fermé mais très gros : le complémentaire de tout ouvert le contenant est inclus dans la réunion de $\overset{\circ}{V}(\infty)$ et d'un nombre fini de $V(a)$.

(ii) Par comparaison, une base d'ouverts adiques est donnée par :

◇ les complémentaires d'un nombre fini de points classiques,

◇ le complémentaire de $V(a)$ si $a \in k_C$ (défini par $v(T-a) \leq v(1)$) ou de $V(\{\mathrm{ord}_\infty\})$ (défini par $v(T) \geq v(1)$).

Pour la topologie adique, le point générique est dense (contrairement à la topologie adoque), et ord_a est dense dans $V(a)$ (comme pour la topologie adoque).

(iii) Le schéma formel associé à A a pour espace topologique sous-jacent le schéma $\mathrm{Spec}(k_C[T])$; il n'a pour points que le point générique et les points classiques, et pour ouverts non vides uniquement les complémentaires de sous-ensembles finis de points classiques (et le point générique est dense).

• Le faisceau structural adoque

— Si $a \in k_C$, alors $\mathscr{O}_Y(V(a)) = \mathscr{O}_C[[T-a]]$ (i.e. $V(a)$ est une boule unité ouverte).

— Si $a \in \mathrm{P}^1(k_C)$, alors $\overset{\circ}{V}(a)$ est un cercle fantôme (on a $\mathscr{O}_Y(V(a)) = \mathscr{O}_C[[T-a, (T-a)^{-1}\rangle$, si $a \in k_C$, et $\mathscr{O}_Y(\overset{\circ}{V}(\infty)) = \mathscr{O}_C[[T^{-1}, T\rangle)$. Remarquons que le cercle fantôme $\overset{\circ}{V}(\infty)$ a un statut spécial car il est aussi fermé contrairement à tous les autres (l'adhérence de $\overset{\circ}{V}(a)$ est $V(a)$, si $a \in k_C$).

— Si $a_1, \dots, a_k \in k_C$, alors $\mathscr{O}_Y(Y \setminus \{a_1, \dots, a_k\}) = \mathscr{O}_C\langle T, \frac{1}{T-a_1}, \dots, \frac{1}{T-a_k}\rangle$. (comme pour le schéma formel correspondant).

Remarque 3.5. — (i) $U = \sqcup_{a \in k_C} V(a)$ est un ouvert strict de B (son complémentaire est constitué du point générique et de ord_∞). On a $\mathscr{O}_Y(U) = \prod_{a \in k_C} \mathscr{O}_C[[T - [a]]]$ (une sorte de complété profini de $\mathscr{O}_C\langle T\rangle$).

(ii) Si U est un ouvert de Zariski (i.e. le complémentaire d'un ensemble fini A de points classiques), alors U contient les cercles fantômes $\overset{\circ}{V}(a)$ correspondant aux $a \in A$ (ainsi que la cercle fantôme $\overset{\circ}{V}(\infty)$).

3.1.4. Affinoïdes

La boule unité adoque est un cas particulier de $\mathscr{O}_C$-short, cf. n° 3.3.1. C'est aussi un cas particulier d'affine adoque Y^{ado} associé à un affinoïde Y (i.e. associé à $\mathscr{O}^+(Y)$) de dimension 1. L'espace topologique Y^{ado} est la réduction canonique de Y du n° 2.2.2, vue comme espace de Berkovich au lieu de schéma (ce qui rajoute des points et des ouverts).

Comme la boule unité, Y^{ado} a trois types de points : les points génériques des composantes irréductibles de la réduction canonique, les points classiques, et des valuations de rang 1 pour tout point des compactifiées lisses des composantes irréductible.

Une base d'ouverts de la topologie est constituée des ouverts de Zariski (complémentaire d'ensembles finis de points classiques), des voisinages infinitésimaux des points classiques (le voisinage infinitésimal d'un point singulier peut être très compliqué), et des cercles fantômes associés aux valuations de rang 1.

Remarque 3.6. — La frontière $\partial^{\mathrm{ad}} Y$ de Y du (ii) de la rem. 2.2 est un ouvert de Y^{ado} constitué de cercles fantômes.

3.2. R-algèbres de Tate

3.2.1. Épaississements de $\mathscr{O}_C$. — Un épaississement R de $\mathscr{O}_C$ est un anneau muni d'un morphisme surjectif $\theta_R : R \to \mathscr{O}_C$ tel que, si $r \in \mathbf{Q}_+^*$, et si $I_r = \theta_R^{-1}(p^r \mathscr{O}_C)$, alors R est séparé et complet pour la topologie I_r-adique. En particulier, R est local, de corps résiduel k_C ; on note $\mathfrak{m}_R$ son idéal maximal. Des exemples naturels d'épaississements de $\mathscr{O}_C$ sont $\mathscr{O}_C$, $\mathrm{A_{inf}}$ ou $\mathscr{O}_C[[T_1, \dots, T_d]]$.

Si R est un épaississement de $\mathscr{O}_C$, on munit R de la topologie I_r-adique (qui ne dépend pas du choix de $r \in \mathbf{Q}_+^*$) et on note $\mathrm{Sp}(R)$ l'ensemble des idéaux premiers fermés $\mathfrak{p}$ de R, tels que $\mathfrak{p}[\frac{1}{p}]$ soit un idéal maximal de $R[\frac{1}{p}]$.

– Si $R = \mathscr{O}_C[[T_1, \dots, T_d]]$, alors $\mathrm{Sp}(R)$ n'est autre que l'ensemble $\mathfrak{m}_R^d$ des C-points de la boule unité ouverte de dimension d.

– Le cas $R = \mathrm{A_{inf}}$ est plus amusant (cf. [14, cor. 3.3] pour ce résultat de Fargues et Fontaine) : dans ce cas $\mathrm{Sp}(R)$ a un élément un peu étonnant, à savoir $\mathrm{Ker}\,\theta_0$ pour lequel $R/\mathrm{Ker}\,\theta_0 = \mathscr{O}_{\breve{C}}$; tous les autres éléments de $\mathrm{Sp}(\mathrm{A_{inf}})$ sont de la forme $(p - [a])$, avec $a \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$

(non uniquement déterminé), et $\mathrm{A_{inf}}/(p-[a])$ est l'anneau des entiers d'un corps C_a algébriquement clos, complet pour v_p et dont le basculé $C_a^\flat$ est $C^\flat$. (Si $a = p^\flat$ – et donc $[a] = \tilde{p}$ – ce quotient n'est autre que $\mathscr{O}_C$.)

On écrit $\tilde{p} = 0$ pour le quotient $\mathrm{A_{inf}}/\mathrm{Ker}\,\theta_0$ et $p = [a]$ pour $\mathrm{A_{inf}}/(p-[a])$ (et $p = \tilde{p}$, si $a = p^\flat$, et donc $\mathrm{A_{inf}}/(p-[a]) = \mathscr{O}_C$).

3.2.2. R-algèbres de Tate. — Soit R un épaississement de $\mathscr{O}_C$. Un R-module M est dit orthonormalisable s'il est isomorphe au module $\ell_0^\infty(I,R)$ des suites $(x_i)_{i\in I}$ tendant vers 0 en ∞ : un tel isomorphisme fournit une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de M telle que tout élément x de M puisse s'écrire, de manière unique, sous la forme $\sum_{i\in I} x_i e_i$ avec $x_i \to 0$ quand $i \to \infty$; une telle famille est appelée une base orthonormale de M sur R.

Une R-algèbre de Tate B est une R-algèbre orthonormalisable, quotient d'un $R\langle x_1,\dots,x_n\rangle$. On pose $\overline{B} = k_C \otimes_R B$ (c'est un quotient de $k_C[x_1,\dots,x_n]$).

Soit B une R-algèbre de Tate de la forme [28] $R\,\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_K} B_K$, où B_K est une $\mathscr{O}_K$-algèbre de Tate, et K est un sous-corps complet de C, de valuation discrète.

Lemme 3.7. — Soient $r > 0$ et $R^{(r)} = \mathscr{O}_K + I_r$. Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $R^{(r)}\,\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_K} B_K$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B sur R,

(ii) $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ est une base algébrique de $\overline{B}$ sur k_C.

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) est immédiate ; prouvons la réciproque. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de B_K telle que f_i ait pour image $\overline{e}_i$ dans $\overline{B}$. Les f_i forment une base orthonormale de B_K sur $\mathscr{O}_K$ (on est dans le cas de valuation discrète où l'équivalence entre (i) et (ii) est parfaitement classique), et donc aussi de B sur R.

Soit M la matrice des e_i dans la base des f_i. Par construction, M est à coefficients dans $R^{(r)}$ et congrue à 1 modulo $\mathfrak{m}_R$, et donc $M = 1 - N$, avec N à coefficients dans I_r. Il s'ensuit que M est inversible, d'inverse $1 + N + N^2 + N^3 + \cdots$ (la série converge car N^k est à coefficients dans I_r^k et R est séparé et complet pour la topologie I_r-adique). Les e_i, pour $i \in I$, forment donc une base orthonormale de B sur R. □

Lemme 3.8. — Soit B de la forme $R\,\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_K} B_K$ comme ci-dessus, et soit A une sous-R-algèbre fermée de B vérifiant :

• $\overline{A}$ est de type fini sur k_C,

• il existe $r > 0$ et une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de $R^{(r)}\,\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_K} B_K$ dont les images dans B/A forment une base orthonormale de B/A.

Alors A est une R-algèbre de Tate.

Démonstration. — Il existe $\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_s \in \overline{A}$ engendrant $\overline{A}$ sur k_C, et donc $J \subset \mathbf{N}^s$ tel que les $\overline{\mathbf{z}}^{\mathbf{j}} = \overline{z}_1^{j_1}\cdots\overline{z}_s^{j_s}$, pour $\mathbf{j} = (j_1,\dots,j_s) \in J$, forment une base de $\overline{A}$ sur k_C.

Choisissons des relèvements $z_1,\dots,z_s$ de $\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_s$ dans A. Quitte à diminuer r, on peut supposer que les z_i appartiennent à $R^{(r)}\,\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_K} B_K$. Les $\mathbf{z}^{\mathbf{j}}$, pour $\mathbf{j} \in J$ appartiennent aussi à

28. En particulier R est supposée contenir $\mathscr{O}_K$; par exemple, si $R = \mathrm{A_{inf}}$, cela impose $K \subset \breve{C}$.

$R^{(r)} \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_K} B_K$, et il résulte du lemme 3.7 que les z^j, pour $j \in J$, et les e_i, pour $i \in I$, forment une base orthonormale de B sur R. On en déduit que les z^j, pour $j \in J$, forment une base orthonormale de A sur R, et donc que A est orthonormalisable et quotient de $R\langle z_1, \dots, z_s\rangle$.

Cela permet de conclure. □

3.2.3. Relèvement de morphismes. — Si K est un sous-corps fermé de C et si A est une algèbre de Tate sur $\mathscr{O}_K$, posons $\overline{A} = A/\mathfrak{m}_K A$. Rappelons que, si A est sans $\mathscr{O}_K$-torsion, alors A est formellement lisse sur $\mathscr{O}_K$ si et seulement si $\overline{A}$ est lisse sur k_K.

Proposition 3.9. — ([8, th. A-1]) Soient A, B des algèbres de Tate sur $\mathscr{O}_K$, avec A formellement lisse sur $\mathscr{O}_K$. Si $\overline{s} : \overline{A} \to \overline{B}$ est un morphisme de $\mathscr{O}_K$-algèbres, il existe $s : A \to B$ relevant $\overline{s}$.

Corollaire 3.10. — (i) Si A est une algèbre de Tate formellement lisse sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$, il existe $\varphi : A \to A$ relevant $x \mapsto x^p$ sur $\overline{A}$ (un tel φ est un frobenius de A).

(ii) Si B est une algèbre de Tate formellement lisse sur $\mathscr{O}_C$, il existe une algèbre de Tate $\breve{B}$ sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ telle que l'on ait $B \cong \mathscr{O}_C \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \breve{B}$.

Démonstration. — Le (i) est une application directe de la prop. 3.9 (avec $B = A$). Pour prouver le (ii), on part d'un relèvement formellement lisse A de $\overline{B}$ sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ (il en existe par la propriéte de relèvement infinitésimal des morphismes lisses), et on observe que c'est une algèbre de Tate sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$. Alors $A' := \mathscr{O}_C \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} A$ est une algèbre de Tate formellement lisse sur $\mathscr{O}_C$ et $A'/\mathfrak{m}A' \cong \overline{B}$. La prop. 3.9 fournit un relèvement $s : A' \to B$ de l'identité de $\overline{B}$. Il reste à vérifier que s est un isomorphisme.

Soit $r > 0$. Le morphisme induit $s_r : A'/p^r \to B/p^r$ est un morphisme d'algèbres de type fini sur $\mathscr{O}_C/p^r$. Il s'ensuit que, pour $t < r$ assez petit, s_t est un isomorphisme (on a $A'/p^t \cong (\mathscr{O}_C/p^t) \otimes \overline{B}$ et $B/p^t \cong (\mathscr{O}_C/p^t) \otimes \overline{B}$, si t est assez petit, et s_t est l'identité puisque s est un relèvement de l'identité). On conclut en utilisant la complétude de A' et B pour la topologie p-adique. □

Remarque 3.11. — Il résulte de la preuve du (ii) qu'une algèbre de Tate formellement lisse sur $\mathscr{O}_C$ est, à isomorphisme près, complètement déterminée par $\overline{B}$.

Remarque 3.12. — Une †-algèbre sur $\mathscr{O}_K$ est une $\mathscr{O}_K$-algèbre plate A de la forme $\mathscr{O}_K[x_1, \dots, x_n]^\dagger/I$, où I est un idéal de type fini. On dit que A est formellement lisse sur $\mathscr{O}_K$ si $\overline{A} = A/\mathfrak{m}_K A$ est lisse sur k_K. La prop. 3.9 s'étend à ce cadre : si A, B sont des †-algèbres sur $\mathscr{O}_K$, avec A formellement lisse sur $\mathscr{O}_K$, et si $\overline{s} : \overline{A} \to \overline{B}$ est un morphisme de k_K-algèbres, il existe $s : A \to B$ relevant $\overline{s}$. Cela permet de construire des relèvements de Frobenius surconvergents.

3.3. Shorts, jambes et cercles fantômes

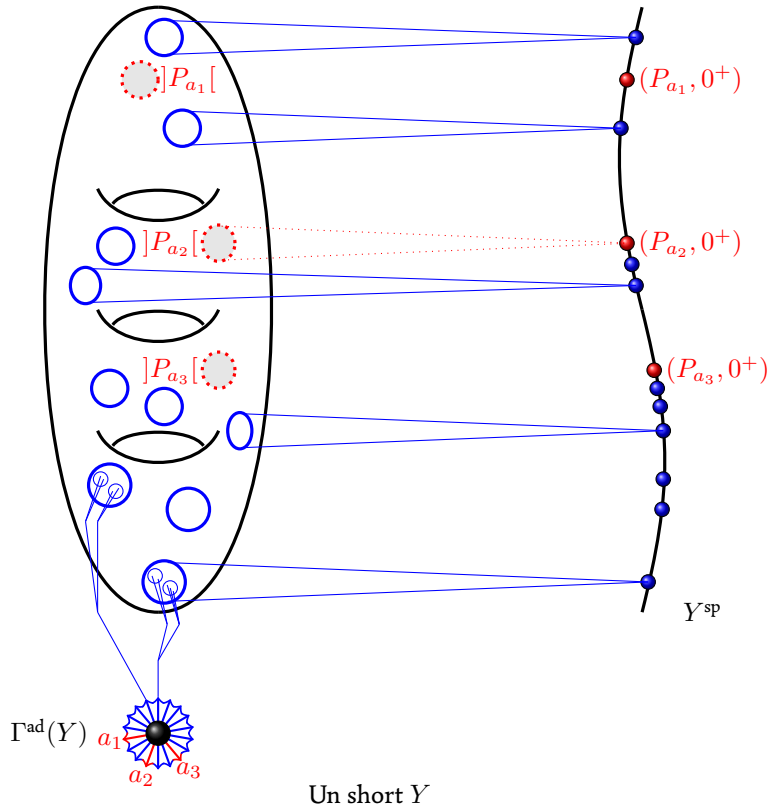
3.3.1. Shorts. — Un short Y est le schéma adoque associé à un schéma formel affine, lisse sur $\mathscr{O}_C$, dont la fibre générique Y_C est un affinoïde connexe, de dimension 1. On a $\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}^+(Y_C)$ et $\mathscr{O}(Y)$ est un quotient formellement lisse de $\mathscr{O}_C\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, pour un certain n.

Remarque 3.13. — (i) D'après le (ii) du cor. 3.10, un short Y admet un modèle $\breve{Y}$ sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$, i.e. $\mathscr{O}(Y) = R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \mathscr{O}(\breve{Y})$, et $\breve{Y}$ est unique à isomorphisme près.

(ii) Si R est un épaississement de $\mathscr{O}_C$, on définit un R-short comme l'extension des scalaires à R d'un short $\breve{Y}$ sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$. Si Y est un short, on peut le plonger dans un R-short Y_R pour tout épaississement R de $\mathscr{O}_C$: il suffit de choisir un modèle $\breve{Y}$ de Y sur $\mathscr{O}_{\breve{Y}}$, et de poser $\mathscr{O}(Y_R) = R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \mathscr{O}(\breve{Y})$.

(iii) En particulier, on peut plonger un short Y dans un $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$-short $\widetilde{Y}$. La fibre en $p = \tilde{p}$ de $\widetilde{Y}$ n'est autre que Y, tandis que celle en $\tilde{p} = 0$ est $\breve{Y}$.

Un choix de frobenius φ sur $\breve{Y}$ en induit un sur $\widetilde{Y}$ puisqu'on dispose d'un frobenius sur $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$. Alors $\breve{Y}$ est stable par le frobenius agissant sur $\widetilde{Y}$, et la restriction de ce frobenius à $\breve{Y}$ est celui dont on est parti.



Un short Y

Ce dessin représente un short Y, avec l'ensemble de ses points classiques (la surface de Riemann), sa fibre spéciale Y^{sp} (la courbe) et son squelette (le point hérissé de flèches). Il est obtenu en retirant à une courbe de genre 3 avec bonne réduction les tubes $]P_{a_1}[,]P_{a_2}[,]P_{a_3}[$ des points marqués $P_{a_1}, P_{a_2}, P_{a_3}$ de Y^{sp}.

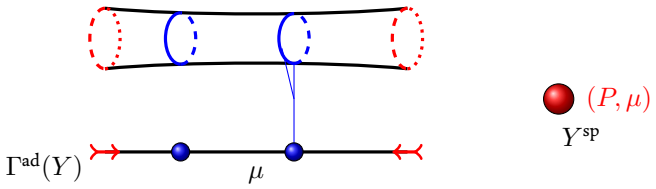
• Le squelette (adique) $\Gamma^{\mathrm{ad}}(Y)$ est constitué du point noir (point de Gauss de Y) et des trois flèches rouges a_1, a_2, a_3 (correspondant aux trois points marqués de Y^{sp}). Le squelette analytique $\Gamma^{\mathrm{an}}(Y)$ est juste le point noir.

• Les disques bleus de la surface de Riemann sont les points classiques des tubes des points non marqués de Y^{sp} (ils sont censés recouvrir la surface privée de $]P_{a_1}[,]P_{a_2}[,]P_{a_3}[$); on a dessiné les spécialisations de cinq de ces disques). Les cercles rouges en pointillés sont les cercles fantômes à la frontière du short.

• L'espace de Berkovich est l'arbre issu du point noir dont les branches aboutissent aux points classiques (auxquelles il faut rajouter des branches s'arrêtant en chemin, correspondant aux points de type 4, puisqu'on n'a pas supposé C sphériquement complet); il ne voit pas les flèches bleues.

• Les flèches bleues sont en bijection avec les points non marqués de Y^{sp}; ce sont les points adiques de type 5 dans l'adhérence du point de Gauss; chacune est la racine du sous-arbre des branches aboutissant dans le tube correspondant (on a dessiné une petite partie de deux de ces arbres).

3.3.2. R-Jambes. — Si R est un épaississement de $\mathscr{O}_C$, une R-jambe Y est le schéma adoque associé à un anneau de la forme $R[[T_0,T_1]]/(T_0T_1-\alpha)$ (la topologie est la (I_r,T_0,T_1)-adique), avec $\alpha\in\mathfrak{m}_R$. (Si $\alpha=0$, la jambe est singulière et sa longueur est $+\infty$.) Si $R=\mathscr{O}_C$, la longueur de Y est $v_p(\alpha)$. Une $\mathscr{O}_C$-jambe est dite normalisée, si $\alpha=p^r$, avec $r\in\mathbf{Q}_+^*$; sa longueur est alors r.



Une jambe Y de longueur μ

Ce dessin représente une jambe de longueur μ. Sa fibre spéciale est un point marqué de multiplicité μ, et son squelette est un segment ouvert de longueur μ. Le cyclindre représente l'ensemble des points classiques de Y; chaque point de type 2 du squelette est la base d'un arbre aboutissant sur un cercle du cyclindre. Les deux flèches rouges du squelette correspondent aux deux cercles fantômes (représentaés par des cercles rouges en pointillés) à la frontière.

Si Y est une $\mathscr{O}_C$-jambe normalisée (avec $\mathscr{O}(Y)=\mathscr{O}_C[[T_0,T_1]]/(T_0T_1-p^r)$), on peut la plonger dans la $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$-jambe $\widetilde{Y}$ définie par $\mathscr{O}(\widetilde{Y})=\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}[[T_0,T_1]]/(T_0T_1-\tilde{p}^r)$. On note $\breve{Y}$ la fibre de $\widetilde{Y}$ en $\tilde{p}=0$: on a $\mathscr{O}(\breve{Y})=\mathscr{O}_{\breve{C}}[[T_0,T_1]]/(T_0T_1)$, et donc $\breve{Y}$ est singulière, et obtenue en recollant deux boules ouvertes sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ en leurs centres. On munit $\breve{Y}\subset\widetilde{Y}$ de frobenius compatibles φ par la formule $\varphi(T_i)=T_i^p$, si $i=0,1$.

3.3.3. R-Cercles fantômes. — Un R-cercle fantôme Y est le schéma adoque associé à un anneau de la forme $R[[T,T^{-1}\rangle$ (complété de $R[[T]][T^{-1}]$ pour la topologie I_r-adique). Un paramètre local de Y est un élément z de $\mathscr{O}(Y)=R[[T,T^{-1}\rangle$ dont l'image $\overline{z}$ dans $k_C((T))$ vérifie $v_T(\overline{z})=1$ (donc, en particulier, T est un paramètre local de Y); on a alors un isomorphisme $R[[z,z^{-1}\rangle\xrightarrow{\sim}\mathscr{O}(Y)$.

Si Y est un $\mathscr{O}_C$-cercle fantôme avec $\mathscr{O}(Y)=\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle$, on le plonge dans le $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$-cercle fantôme $\widetilde{Y}$ défini par $\mathscr{O}(\widetilde{Y})=\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}[[T,T^{-1}\rangle$. On note $\breve{Y}$ la fibre de $\widetilde{Y}$ en $\tilde{p}=0$ (et donc $\mathscr{O}(\breve{Y})=\mathscr{O}_{\breve{C}}[[T,T^{-1}\rangle$). On munit $\breve{Y}\subset\widetilde{Y}$ de frobenius compatibles φ par la formule $\varphi(T)=T^p$.

3.3.4. Partie polaire en un cercle fantôme de la frontière. — Soit Y un R-short, et soit $\mathscr{O}^{++}(Y) = \mathrm{Ker}(\mathscr{O}(Y) \to k_C \otimes_R \mathscr{O}(Y))$. Soit $P \in \breve{Y}^{\mathrm{sp}}$ de multiplicité 0^+, et soit $z \in \mathscr{O}^+(\breve{Y})$ vérifiant $v_{\breve{Y},P}(z) = (0,-1)$ (un tel z n'existe pas forcément s'il n'y a qu'un seul point de multiplicité 0^+ sur Y^{sp}, mais existe toujours si le nombre de tels points est ≥ 2 grâce au théorème de Riemann-Roch). Alors z^{-1} est un paramètre du cercle fantôme correspondant à P à la frontière de $\breve{Y}$. Soit T un paramètre du R-cercle fantôme défini par ce cercle fantôme ; alors $z^{-1} \in R[[T,T^{-1}\rangle$ et on a un isomorphisme $\iota : R[[z^{-1},z\rangle \xrightarrow{\sim} R[[T,T^{-1}\rangle$.

Lemme 3.14. — Les $\iota(z^n)$, pour $n \in \mathbf{N}$, forment une base orthonormale de $R[[T,T^{-1}\rangle/TR[[T]]$ sur R. En particulier, ι induit des surjections

$$\mathscr{O}^+(Y) \to R[[T,T^{-1}\rangle/TR[[T]] \quad \text{et} \quad \mathscr{O}^{++}(Y) \to \mathfrak{m}_R[[T,T^{-1}\rangle/T\mathfrak{m}_R[[T]]$$

Démonstration. — Il existe $\alpha \in k_C^*$ tel que $\iota(z) \equiv [\alpha]T^{-1} \bmod \mathfrak{m}_R\langle T^{-1}\rangle + R[[T]]$ et, quitte à changer T en $[\alpha^{-1}]T$, on peut supposer $\alpha = 1$. Il existe alors $r > 0$ tel que $\iota(z) - T^{-1} \in I_r\mathscr{O}(Y) + R[[T]]$. Alors $\iota(z^k) - T^{-k} \in I_r\mathscr{O}(Y) + T^{-(k-1)}R[[T]]$, pour tout $k \geq 0$. On en déduit que tout élément f de $(R/I_r)[[T,T^{-1}\rangle$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $f^+ + f^-$, avec $f^+ \in T(R/I_r)[[T]]$ et $f^- \in (R/I_r)[\iota(z)]$. On prouve, par récurrence, le même résultat modulo I_r^n et, par passage à la limite, on en tire que tout élément f de $R[[T,T^{-1}\rangle$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $f^+ + f^-$, avec $f^+ \in TR[[T]]$ et $f^- \in R\langle\iota(z)\rangle$.

Le résultat s'en déduit. □

3.4. Compactification d'un affinoïde

Proposition 3.15. — (Van der Put [48]) Soit Y_C un affinoïde sur C. Alors il existe une courbe algébrique propre X_C contenant Y_C et telle que $X_C \setminus Y_C$ soit une réunion finie de disques ouverts.

Démonstration. — Soit Y le schéma adoque associé au schéma formel $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}^+(Y_C))$, et soit X le schéma adoque obtenu en recollant des boules ouvertes le long des cercles fantômes à la frontière de Y. L'espace topologique de X est la compactifiée $\overline{\mathscr{Y}}$ de la fibre spéciale $\mathscr{Y}$ de $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}^+(Y_C))$. Il s'agit de prouver que si on restreint le faisceau structural de X aux ouverts de Zariski, on obtient des $\mathscr{O}_C$-algèbres de Tate : cela implique que cette restriction est un schéma formel p-adique [(29)] qui est un modèle d'une courbe X_C, propre puisque sa fibre spéciale est propre, et qui est l'espace rigide associé à une courbe algébrique d'après GAGA rigide.

Si U est un ouvert (de Zariski) assez petit de $\overline{\mathscr{Y}}$, il y a deux cas possibles :

• $U \subset \mathscr{Y}$ auquel cas $]U[$ est un ouvert affinoïde de Y_C, et on a $\mathscr{O}_X(U) = \mathscr{O}^+(]U[)$, ce qui fait qu'il n'y a rien à prouver.

• $U \setminus (U \cap \mathscr{Y}) = \{P\}$, auquel cas $U \setminus \{P\}$ est un ouvert de $\mathscr{Y}$ que l'on peut supposer lisse et connexe (et donc $]U \setminus \{P\}[$ est un short et on note C_P le cercle fantôme à la frontière de $]U \setminus \{P\}[$ correspondant à P ; on recolle $]U \setminus \{P\}[$ et le disque ouvert D_P avec $\mathscr{O}(D_P) = \mathscr{O}_C[[T]]$

29. Une manifestation d'un principe GaGa (Géométrie adoque et Géométrie analytique).

le long de C_P) : $]U\setminus\{P\}[$ est obtenu, par extension des scalaires, à partir d'un short $\breve{Y}_P$ défini sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ (i.e. $\mathscr{O}^+(]U\setminus\{P\}[) = \mathscr{O}_C\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}}\mathscr{O}(\breve{Y}_P)$); on choisit un paramètre $z\in\mathscr{O}^+(\breve{Y}_P)$ du cercle fantôme correspondant à P, et un isomorphisme $\iota : \mathscr{O}_C[[z,z^{-1}\rangle \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle$. La propriété de faisceau fournit alors la formule :

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_Y(U) &= \mathrm{Ker}\big[\mathscr{O}^+(]U\setminus\{P\}[)\oplus\mathscr{O}_C[[T]]\to\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle\big]\\ &= \mathrm{Ker}\big[\mathscr{O}^+(]U\setminus\{P\}[)\to\frac{\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle}{\mathscr{O}_C[[T]]}\big],\end{aligned}$$

où l'application $\mathscr{O}^+(]U\setminus\{P\}[)\to\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle$ est la restriction de ι. Pour simplifier les notations, posons $A=\mathscr{O}_Y(U)$ et $B=\mathscr{O}^+(]U\setminus\{P\}[)$. L'intersection A^{++} de A et B^{++} est le noyau

$$A^{++} = \mathrm{Ker}\big[B^{++}\to\frac{\mathfrak{m}_C[[T,T^{-1}\rangle}{\mathfrak{m}_C[[T]]}\big].$$

D'après le lemme 3.14, on a des suites exactes

$$0\to A\to B\to\frac{\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle}{\mathscr{O}_C[[T]]}\to 0,\quad 0\to A^{++}\to B^{++}\to\frac{\mathfrak{m}_C[[T,T^{-1}\rangle}{\mathfrak{m}_C[[T]]}\to 0.$$

On en déduit une suite exacte

$$0\to\overline{A}\to\overline{B}\to\frac{k_C((T))}{k_C[[T]]}\to 0.$$

Il en résulte que $\overline{A}=\mathscr{O}_{\mathscr{Y}}(U)$. En particulier, $\overline{A}$ est de type fini sur k_C.

Par ailleurs, d'après le lemme 3.14, les z^{-n}, pour $n\geq 1$, forment une base de Banach de B/A sur $\mathscr{O}_C$. Or les z^{-n} appartiennent à $\breve{B}=\mathscr{O}(\breve{Y}_P)$ et on est dans les conditions d'application du lemme 3.8 ce qui permet d'en déduire que A est une $\mathscr{O}_C$-algèbre de Tate, ce que l'on voulait. □

3.5. Patron d'une courbe

3.5.1. Définition. — Un patron de courbe $(\Gamma,(Y_i)_{i\in I},(\iota_{i,j})_{(i,j)\in I_2})$ est la donnée de :

• Un graphe bipartite marqué fini [30] $\Gamma=(I,I_2,\mu)$, $I=A_c\sqcup S$, $\mu(a)\in\mathbf{Q}_{>0}$ si $a\in A_c$, sans boucle ayant 1 ou 2 sommets.

• Pour tout $a\in A_c$, une jambe Y_a de longueur $\mu(a)$ avec

$$\mathscr{O}(Y_a)=\mathscr{O}_C[[T_{a,s_1},T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2}-p^{\mu(a)}),$$

où s_1,s_2 sont les extrémités de a, et on note Y_{a,s_i}, pour $i=1,2$, le cercle fantôme avec $\mathscr{O}(Y_{a,s_i})=\mathscr{O}_C[[T_{a,s_i},T_{a,s_i}^{-1}\rangle$.

• Pour tout $s\in S$, un short Y_s dont la frontière $\partial^{\mathrm{ad}}Y_s$ est constituée de cercles fantômes $Y_{s,a}$ indexés par $a\in A(s)$,

• Pour tout couple (a,s), avec $a\in A_c$ et $s\in S(a)$, un isomorphisme $\iota_{a,s} : Y_{s,a}\xrightarrow{\sim} Y_{a,s}$ de cercles fantômes.

30. Cette restriction n'est pas essentielle mais nous n'aurons besoin que de patrons finis dans ce qui suit.

Remarque 3.16. — On peut généraliser la notion de patron en ajoutant un sous-ensemble B de $A \setminus A_c$, et pour tout $b \in B$:

- une boule ouverte Y_b, avec $\mathscr{O}(Y_b) = \mathscr{O}_C[[T_b]]$,
- un cercle fantôme $Y_{b,s}$, où $S(b) = \{s\}$, avec $\mathscr{O}(Y_{b,s}) = \mathscr{O}_C[[T_{b,s}, T_{b,s}^{-1}\rangle$,
- un isomorphisme $\iota_{b,s} : Y_{s,b} \xrightarrow{\sim} Y_{b,s}$.

3.5.2. Patrons d'une courbe quasi-compacte. — On peut associer un patron de courbe à une courbe quasi-compacte Y sur C, munie d'une triangulation S. Soit Y_S le $\mathscr{O}_C$-modèle semi-stable associé à S. On suppose S suffisamment fine pour que la fibre spéciale Y_S^{sp} ait au moins deux composantes irréductibles, que ces composantes irréductibles soient lisses et que deux d'entre elles s'intersectent en au plus un point. Le patron de Y associé à S est obtenu de la manière suivante.

• On note $\Gamma = (I, I_2, \mu)$, avec $I = A_c \sqcup S$, le graphe bipartite marqué associé au graphe dual de la fibre spéciale Y_S^{sp} de Y_S (cf. n° 2.4.2). (on dispose donc de courbes propres Y_s^{sp}, pour $s \in S$, d'un ouvert $\mathring{Y}_s^{\mathrm{sp}}$ de Y_s^{sp}, et de points marqués P_a de multiplicité $\mu(a)$, avec $\mu(a) \in \mathbf{Q}_+^*$ si $a \in A_c$, et $\mu(a) = 0^+$ si $a \in I_2 \setminus I_{2,c}$).

• Si $s \in S$, on note $A(s)$ l'ensemble des arêtes ayant s pour extrémité (les P_a, pour $a \in A(s)$, sont les points marqués de Y_s^{sp}), et $A_c(s) = A(s) \cap A_c$ (les P_a, pour $a \in A_c(s)$, sont les points singuliers de Y_s^{sp}).

• Si $s \in S$, on munit d'une structure de $\mathscr{O}_C$-short le schéma formel Y_s défini par $\mathscr{O}(Y_s) = \mathscr{O}^+(]\mathring{Y}_s^{\mathrm{sp}}[)$, où $]\mathring{Y}_s^{\mathrm{sp}}[$ est le tube de $\mathring{Y}_s^{\mathrm{sp}}$ dans Y. Si $a \in A_c$, on note Y_a la $\mathscr{O}_C$-jambe définie par $\mathscr{O}(Y_a) = \mathscr{O}^+(]P_a[)$, où $]P_a[$ est le tube de P_a dans Y ; elle est de longueur $\mu(a)$.

(Les Y_i, pour $i \in I$, forment un recouvrement adoque de Y.)

• Si $a \in A_c$, on note $S(a)$ l'ensemble des extrémités de a, i.e. l'ensemble des $s \in S$ tels que $P_a \in Y_s^{\mathrm{sp}}$. Alors $S(a)$ a deux éléments $s_1 = s_1(a)$ et $s_2 = s_2(a)$ dont l'ordre est déterminé par l'orientation choisie de Γ. On choisit une fonction T_{a,s_1} sur un ouvert de $Y_{s_1} \sqcup Y_a \sqcup Y_{s_2}$ dont la restriction à Y_a induit un isomorphisme de Y_a sur la couronne $0 < v_p(T_{a,s_1}) < \mu(a)$, et telle que $v_{s_1}(T_{a,s_1}) = 0$. On pose $T_{a,s_2} = p^{\mu(a)}/T_{a,s_1}$, donc $v_{s_2}(T_{a,s_2}) = 0$ et

$$\mathscr{O}(Y_a) = \mathscr{O}_C[[T_{a,s_1}, T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2} - p^{\mu(a)}).$$

• Si $(a, s) \in I_{2,c}$, Y_a intersecte Y_s le long d'un cercle fantôme $Y_{a,s}$ et comme S est fine, $Y_i \cap Y_j \neq \varnothing$ si et seulement si $(i, j) \in I_{2,c}$ (si $i \neq j$ bien sûr).

3.6. Construction de courbes à partir d'un patron

La procédure fournissant un patron d'une courbe quasi-compacte à partir d'une triangulation peut s'inverser, ce qui permet de construire des courbes (et même des familles de courbes) à partir d'un patron.

3.6.1. Patrons de R-courbes. — Un patron de R-courbe $(\Gamma, (Y_i)_{i\in I}, (\iota_{i,j})_{(i,j)\in I_{2,c}})$ est la donnée de :

• Un graphe bipartite marqué fini $\Gamma = (I, I_2, m)$, avec $I = A_c \sqcup S$, et $m : A_c \to \mathfrak{m}_R$, sans boucle ayant 1 ou 2 sommets.

• Pour tout $a \in A_c$, une R-jambe Y_a avec

$$\mathscr{O}(Y_a) = R[[T_{a,s_1}, T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2} - m(a)),$$

où s_1, s_2 sont les extrémités de a, et on note Y_{a,s_i}, pour $i = 1, 2$ le R-cercle fantôme avec $\mathscr{O}(Y_{a,s_i}) = R[[T_{a,s_i}, T_{a,s_i}^{-1}\rangle$.

• Pour tout $s \in S$, un R-short Y_s avec $\mathscr{O}(Y_s) \cong R\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}}\mathscr{O}(\breve{Y}_s)$, où $\breve{Y}_s$ est un short défini sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$, dont la frontière $\partial^{\mathrm{ad}}\breve{Y}_s$ est constituée de cercles fantômes $\breve{Y}_{s,a}$ indexés par $a \in A(s)$, et on définit le R-cercle fantôme $Y_{s,a}$ par $\mathscr{O}(Y_{s,a}) = R\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}}\mathscr{O}(\breve{Y}_{s,a})$.

• Pour tout couple $(i,j) \in I_{2,c}$, un isomorphisme $\iota_{i,j} : Y_{j,i} \xrightarrow{\sim} Y_{i,j}$ de R-cercles fantômes.

3.6.2. Construction de R-courbes. — A partir d'un patron de R-courbe, on construit une R-courbe adoque Y^{ado} en recollant les Y_s et les Y_a via les $\iota_{a,s}$. Si le patron est le patron d'une $\mathscr{O}_C$-courbe Y, alors Y^{ado} est le schéma adoque associé à Y. En général, on a le résultat suivant qui est une manifestation d'un principe GaGa.

Théorème 3.17. — Y^{ado} est le schéma adoque associé à une R-courbe Y (i.e. un R-schéma formel de dimension relative 1).

Démonstration. — Notons que, si $s \in S$, alors $k_C \otimes_R \mathscr{O}(Y_s) = k_C \otimes_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \mathscr{O}(\breve{Y}_s)$, et donc Y_s et $\breve{Y}_s$ ont même fibre spéciale Y_s^{sp} qui est, par définition, une courbe projective lisse munie de points marqués de multiplicité 0^+ dont l'intérieur $\overset{\circ}{Y}{}_s^{\mathrm{sp}}$ est le complémentaire de ces points marqués (et $\mathscr{O}(\overset{\circ}{Y}{}_s^{\mathrm{sp}}) = k_C \otimes_R \mathscr{O}(Y_s)$). Si $s \in S$ et si $a \in A(s)$, on note $P_{s,a}$ le point de Y_s^{sp} correspondant à $Y_{s,a}$. Alors Y^{sp} (resp. $\overset{\circ}{Y}{}^{\mathrm{sp}}$) est obtenue à partir de la réunion disjointe des Y_s^{sp} (resp. $\overset{\circ}{Y}{}_s^{\mathrm{sp}}$), pour $s \in S$, en identifiant les points $P_{s_1(a),a}$ et $P_{s_2(a),a}$, pour $a \in A_c$. Le point $P_a = P_{s_1(a),a} = P_{s_2(a),a}$ est alors un point marqué singulier de Y^{sp} (appartenant à $\overset{\circ}{Y}{}^{\mathrm{sp}}$), et on définit sa multiplicité comme étant $m(a)$.

Ceci fournit une description de l'espace topologique sous-jacent à Y^{ado}. Pour démontrer le théorème, il reste à prouver que la restriction $\mathscr{O}_Y$, aux ouverts de Zariski, du faisceau structural $\mathscr{O}_{Y^{\mathrm{ado}}}$ de Y^{ado} produit des R-algèbres de Tate, et il suffit de vérifier ceci pour un voisinage assez petit U de tout point fermé P de $\overset{\circ}{Y}{}^{\mathrm{sp}}$. Il y a deux cas à considérer pour P.

• Si P n'est pas un point marqué, alors P appartient à une unique composante Y_s^{sp} et on prend pour U un ouvert de $\overset{\circ}{Y}{}_s^{\mathrm{sp}}$; son tube $]U[$ dans (la fibre générique de) $\breve{Y}_s$ est un sous-affinoïde de $\breve{Y}_s$, et on a $\mathscr{O}_Y(U) = R\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}}\mathscr{O}^+(]U[)$ qui est bien une R-algèbre de Tate.

• Si $P = P_a$, avec $a \in A_c$, et si $S(a) = \{s_0, s_1\}$, alors P_a est le point d'intersection de $Y_{s_0}^{\mathrm{sp}}$ et $Y_{s_1}^{\mathrm{sp}}$. On prend pour U un ouvert de la forme $U_0 \cup U_1$, où U_i est un ouvert de $Y_{s_i}^{\mathrm{sp}}$ contenant P_a et suffisamment petit pour qu'il existe $Z_i \in \mathscr{O}(U_i)$ ayant un zéro simple en P_a. La propriété de faisceau décrit $\mathscr{O}_Y(U)$ comme le noyau

$$\mathscr{O}_Y(U) = \mathrm{Ker}\left[R\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}}(\mathscr{O}^+(]U_0[) \times \mathscr{O}^+(]U_1[)) \oplus \mathscr{O}(Y_a) \to \mathscr{O}(Y_{a,s_0}) \times \mathscr{O}(Y_{a,s_1})\right],$$

où $]U_i[$ est le tube de U_i dans $\breve{Y}_{s_i}$, les flèches de $\mathscr{O}(Y_a)$ dans les $\mathscr{O}(Y_{a,s_i})$ sont induites par les inclusions des Y_{a,s_i} dans Y_a, et la flèche de $\mathscr{O}^+(]U_i[)$ dans $\mathscr{O}(Y_{a,s_i})$ par $Y_{a,s_i} \cong Y_{s_i,a} \subset]U_i[$, si $i = 0, 1$.

Posons $A = \mathscr{O}_Y(U)$, $\breve{B} = \mathscr{O}^+(]U_0[) \times \mathscr{O}^+(]U_1[)$ et $B = R\,\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}}\breve{B}$. Commençons par prouver que la suite

$$0 \to A \to B \to \frac{R[[T_0, T_0^{-1}\rangle \oplus R[[T_1, T_1^{-1}\rangle}{R[[T_0, T_1]]/(T_0T_1 - m(a))} \to 0$$

est exacte. Elle est exacte à gauche et au milieu par définition de A. Pour prouver la surjectivité de la flèche de droite, il suffit de le faire modulo $m(a)$ car tout est séparé et complet pour la topologie $m(a)$-adique. Mais alors, si $R_a = R/m(a)$, l'application $B/m(a) \to \frac{R_a[[T_0,T_0^{-1}\rangle \oplus R_a[[T_1,T_1^{-1}\rangle}{R_a[[T_0,T_1]]/(T_0T_1)}$ se factorise à travers $\frac{R_a[[T_0,T_0^{-1}\rangle}{T_0R_a[[T_0]]} \oplus \frac{R_a[[T_1,T_1^{-1}\rangle}{T_1R_a[[T_1]]}$. Comme $B = B_0 \oplus B_1$, avec $B_i = R\,\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}}\breve{B}_i$ et $\breve{B}_i = \mathscr{O}^+(]U_i[)$, l'application ci-dessus est la somme des $B_i/m(a) \to \frac{R_a[[T_i,T_i^{-1}\rangle}{T_iR_a[[T_i]]}$, ce qui permet d'utiliser le lemme 3.14 pour prouver sa surjectivité.

Soient $B^{++} = \mathfrak{m}_R\,\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}}\breve{B}$ et $A^{++} = A \cap B^{++}$. Le lemme 3.14 permet aussi de prouver que la suite

$$0 \to A^{++} \to B^{++} \to \frac{\mathfrak{m}_R[[T_0, T_0^{-1}\rangle \oplus \mathfrak{m}_R[[T_1, T_1^{-1}\rangle}{\mathfrak{m}_R[[T_0, T_1]]/(T_0T_1 - m(a))} \to 0$$

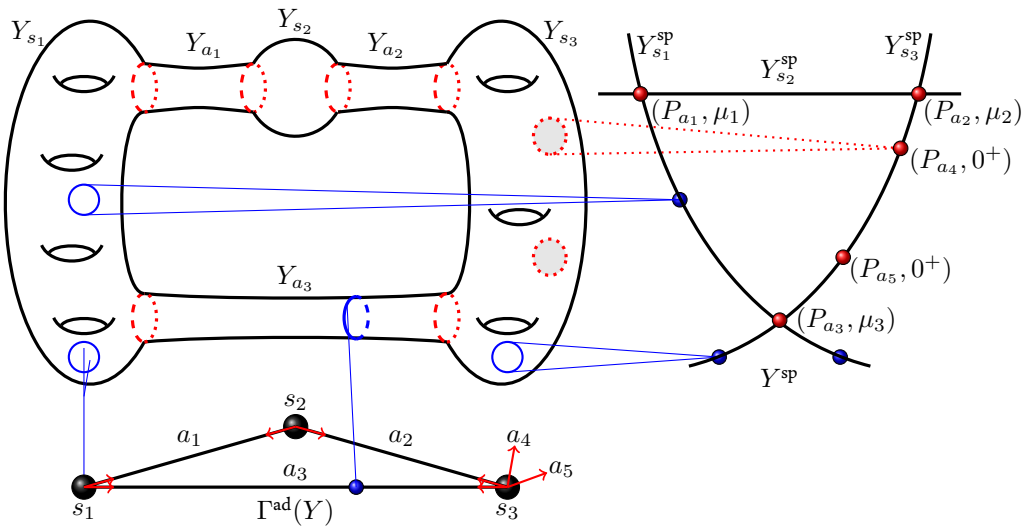
est exacte. Si $\overline{B} = B/B^{++}$ et $\overline{A} = A/A^{++}$, on a donc une suite exacte

$$0 \to \overline{A} \to \overline{B} \to \frac{k_C((T_0)) \oplus k_C((T_1))}{k_C[[T_0, T_1]]/(T_0T_1)} \to 0.$$

Il en résulte que $\overline{A} = \mathscr{O}_{Y^{\mathrm{sp}}}(U)$; en particulier, $\overline{A}$ est de type fini sur k_C.

Par ailleurs, si $z_i \in \mathscr{O}^+(]U_i[)$ est tel que z_i^{-1} est un paramètre du cercle fantôme $Y_{s_i,a}$, on déduit du lemme 3.14, que 1 et les z_i^{-k}, pour $i = 0, 1$ et $k \geq 1$, forment une base orthonormale de B/A. Comme cette base est constituée d'éléments de $\breve{B}$, le lemme 3.8 permet d'en déduire que A est une R-algèbre de Tate, ce que l'on voulait. □

Remarque 3.18. — On peut adapter la construction ci-dessus à un patron généralisé comme dans la rem. 3.16 ; on recolle des R-boules ouvertes Y_b (avec $\mathscr{O}(Y_b) = R[[T_b]]$) le long des R-cercles fantômes $Y_{s,b}$, pour $b \in B$. La courbe ainsi obtenue est propre si et seulement si $B = A \setminus A_c$.



Un affinoïde Y construit à partir de 3 shorts et 3 jambes

Ce dessin représent un affinoïde Y obtenu en recollant, le long de cercles fantômes (en pointillés rouges), des shorts Y_{s_1}, Y_{s_2} et Y_{s_3}, de genres respectifs 4, 0 et 3, et des jambes Y_{a_1}, Y_{a_2} et Y_{a_3}, de longueurs respectives μ_1, μ_2, μ_3. La fibre spéciale Y^{sp} a cinq points marqués : trois correspondant aux spécialisations des jambes et deux aux tubes enlevés sur Y_{s_3}. Le squelette $\Gamma^{\mathrm{an}}(Y)$ est constitué du triangle de sommets s_1, s_2 et s_3 (les longueurs des arêtes a_1, a_2 et a_3 sont μ_1, μ_2 et μ_3) et on obtient $\Gamma^{\mathrm{ad}}(Y)$ en rajoutant les flèches a_4 et a_5.

Notons que $Y^{\mathrm{sp}}_{s_2}$ est un P^1 avec deux points marqués. Il peut donc se contracter et les deux points fusionner en un point de multiplicité $\mu_1+\mu_2$. Cela comprime la sphère Y_{s_2} en un cercle et les deux jambes Y_{a_1} et Y_{a_2} se recollent le long de ce cercle pour former une jambe de longueur $\mu_1+\mu_2$. Enfin, le sommet s_2 disparaît et les arêtes a_1 et a_2 fusionnent en une arête de longueur $\mu_1+\mu_2$.

3.6.3. Cas particuliers. — Le th. 3.17 admet un certain nombre de spécialisations sympathiques.

• Le cas $R=\mathscr{O}_C$.

Par spécialisation au cas $R=\mathscr{O}_C$ et $m(a)=p^{\mu(a)}$, on tire le résultat suivant (l'unicité est immédiate ; l'existence est fournie par le th. 3.17).

Théorème 3.19. — Si $(\Gamma,(Y_i)_{i\in I},(\iota_{i,j})_{(i,j)\in I_{2,c}})$ est un patron de courbe, il existe un unique couple (Y,S), où Y est une courbe quasi-compacte et S une triangulation de Y, dont ce soit le patron.

• Le cas $R=\mathscr{O}_C[[T_a,\ a\in A_c]]$.

Soit $(\Gamma,(Y_i)_i,(\iota_{i,j})_{(i,j)\in I_{2,c}})$ un patron de courbe, avec $\Gamma=(A,S,\mu)$, et soit Y la $\mathscr{O}_C$-courbe qui lui correspond. On fabrique un patron de R-courbe en changeant $a\mapsto\mu(a)$ en $a\mapsto T_a$. La R-courbe associée peut être vue comme une famille de courbes paramétrées par la boule unité ouverte $\mathring{B}^{A_c}$. La fibre en $(p^{\mu(a)})_{a\in A_c}$, est Y ; toutes les courbes de la famille

ont la même fibre spéciale (au marquage près : P_a devient de multiplicité $v_p(z_a)$ sur la fibre en $(z_a)_{a\in A_c}$); la fibre en $(0)_{a\in A_c}$, est une courbe singulière ayant même graphe dual que la fibre spéciale.

• Le cas $R = \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$.

Soit $(\Gamma, (Y_i)_i, (\iota_{i,j})_{(i,j)\in I_{2,c}})$ un patron de courbe, avec $\Gamma = (I, I_2, \mu)$, et soit Y la $\mathscr{O}_C$-courbe qui lui correspond. On peut fabriquer un patron de $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$-courbe $(\Gamma, (\widetilde{Y}_i)_i, (\tilde\iota_{i,j})_{(i,j)\in I_{2,c}})$ en choisissant des modèles $\breve{Y}_s$ sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ des Y_s, pour $s \in S$, et en posant :

$\diamond$ $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_s) := \mathrm{A}_{\mathrm{inf}} \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \mathscr{O}(\breve{Y}_s)$, si $s \in S$,

$\diamond$ $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_a) := \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}[[T_{a,s_1}, T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2} - \tilde p^{\mu(a)})$, si $a \in A_c$,

et en choisissant :

$\diamond$ $\tilde\iota_{a,s} : \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}[[T_{s,a}, T_{s,a}^{-1}\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}[[T_{a,s}, T_{a,s}^{-1}\rangle$ un relèvement de $\iota_{a,s}$, si $(a, s) \in I_{2,c}$ (un tel relèvement est obtenu en choisissant un relèvement $\tilde\iota_{a,s}(T_{s,a}) \in \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}[[T_{a,s}, T_{a,s}^{-1}\rangle$ de $\iota_{a,s}(T_{s,a}) \in \mathscr{O}_C[[T_{a,s}, T_{a,s}^{-1}\rangle)$.

Le patron ainsi défini dépend du choix des $\breve{Y}_s$ et des $\tilde\iota_{i,j}$; la $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$-courbe $\widetilde{Y}$ qui lui correspond peut être vue comme une famille de courbes ayant toutes la même fibre spéciale, paramétrées par les idéaux premiers fermés de $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$:

– la fibre en $p = \tilde p$ est Y ;

– la fibre en $p = [a]$ avec $a \in \mathfrak{m}_{C^\flat} \setminus \{0\}$ est un modèle sur $\mathscr{O}_{C_a}$ d'une courbe lisse définie sur C_a ;

– la fibre $\breve{Y}$ en $\tilde p = 0$ est un modèle sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ d'une courbe singulière définie sur $\breve{C}$, ayant même graphe dual que la fibre spéciale de Y ;

– la fibre en $p = 0$ un modèle sur $\mathscr{O}_{C^\flat}$ d'une courbe lisse sur $C^\flat$.

On peut donc, en particulier, voir $\widetilde{Y}$ comme une famille de courbes interpolant entre Y et $\breve{Y}$.

3.7. Cohomologie de de Rham adoque. — Soit $(\Gamma, (Y_i)_i, (\iota_{i,j})_{(i,j)\in I_{2,c}})$ un patron de courbe, avec $\Gamma = (I, I_2, \mu)$, et soit Y la $\mathscr{O}_C$-courbe qui lui correspond. On décompose I sous la forme $A_c \sqcup S$ habituelle. Si $a \in A_c$ a pour extrémités s_1, s_2, on note U_a^{sp} l'ouvert de Y^{sp} constitué de P_a et des lieux de lissité de $\mathring{Y}_{s_1}^{\mathrm{sp}}$ et $\mathring{Y}_{s_2}^{\mathrm{sp}}$. Le tube U_a de U_a^{sp} s'obtient en recollant Y_{s_1} et Y_{s_2} à Y_a le long de Y_{a,s_1} et Y_{a,s_2}.

Les U_a forment un recouvrement de Y, et on peut calculer la cohomologie de de Rham de Y à la Čech en utilisant ce recouvrement. Si $a_1, a_2 \in A(s)$, on a $U_{a_1} \cap U_{a_2} = \varnothing$ sauf s'il existe $s \in S$ tel que $a_1, a_2 \in A(s)$, auquel cas $U_{a_1,a_2} := U_{a_1} \cap U_{a_2} = Y_s$. On note $C^\bullet_{\mathrm{dR}}(Y)$ le complexe

$$C^\bullet_{\mathrm{dR}}(Y) := \Big[\prod_{a\in A_c} \Omega^\bullet(U_a) \longrightarrow \prod_{a_1,a_2} \Omega^\bullet(U_{a_1,a_2})\Big]$$

Ses groupes d'hypercohomologie sont les groupes $H^i_{\mathrm{dR}}(Y)$ de cohomologie de de Rham (logarithmique) de Y. Un 1-cocycle est de la forme

$$((\omega_a)_a, (f_{a_1,a_2})_{a_1,a_2}), \quad \omega_a \in \Omega^1(U_a),\ f_{a_1,a_2} \in \mathscr{O}(U_{a_1,a_2}),$$
$$df_{a_1,a_2} = \omega_{a_2} - \omega_{a_1}, \quad f_{a_1,a_2} + f_{a_2,a_3} + f_{a_3,a_1} = 0, \text{ si } a_1, a_2, a_3 \in A(s).$$

Un 1-cobord est de la forme $((df_a)_a, (f_{a_2} - f_{a_1})_{a_1,a_2})$.

De même, on définit les $H^i_{\mathrm{dR}}(Y^{\mathrm{ado}})$ comme les groupes d'hypercohomologie du complexe

$$C^\bullet_{\mathrm{dR}}(Y^{\mathrm{ado}}) := [\prod_{i\in I} \Omega^\bullet(Y_i) \longrightarrow \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \Omega^\bullet(Y_{i,j})]$$

On choisit $a(s) \in A(s)$, pour tout $s \in S$. Cela fournit une application $Z^1_{\mathrm{dR}}(Y) \to Z^1_{\mathrm{dR}}(Y^{\mathrm{ado}})$ envoyant $((\omega_a)_a, (f_{a_1,a_2})_{a_1,a_2})$ sur $((\eta_i)_i, (g_{i,j})_{i,j})$, avec $\eta_a = \omega_a$ si $a \in A_c$, $\eta_s = \omega_{a(s)}$ si $s \in S$ et $g_{a,s} = f_{a,a(s)}$ si $(a,s) \in I_{2,c}$.

Proposition 3.20. — L'application $Z^1_{\mathrm{dR}}(Y) \to Z^1_{\mathrm{dR}}(Y^{\mathrm{ado}})$ ci-dessus induit un isomorphisme

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{dR}}(Y^{\mathrm{ado}})$$

qui ne dépend pas du choix des $a(s)$.

Démonstration. — Si on change $a(s)$ en $a'(s)$, cela modifie le cocycle $((\eta_i)_i, (g_{i,j})_{i,j})$ par le bord de $((f_{a(s),a'(s)})_s, (0)_a)$, ce qui montre que le morphisme de la proposition ne dépend pas du choix des $a(s)$.

Prouvons son injectivité. Si $\eta_i = dg_i$ et $g_{i,j} = g_j - g_i$, et si $a \in A_c$ a pour extrémités s_1 et s_2, alors g_a est la restriction à Y_a de la fonction f_a sur U_a valant $g_{s_i} - f_{a(s_i),a}$ sur Y_{s_i} (ces fonctions se recollent sur les Y_{a,s_i} car $f_{a,a(s)} = g_{a,s} = g_s - g_a$). Alors $((\omega_a)_a, (f_{a_1,a_2})_{a_1,a_2})$ est le bord de $(f_a)_a$, ce qui prouve l'injectivité.

Passons à la surjectivité. Compte-tenu de l'injectivité et de ce que tout est (dérivé) complet pour la topologie p-adique, il suffit de vérifier le résultat mod p^r, avec $r > 0$. On choisit r assez petit pour que $Y/p^r \cong (\mathscr{O}_C/p^r) \otimes \mathring{Y}^{\mathrm{sp}}$. Auquel cas, comme H^2 est sans p-torsion, on est ramené au même énoncé pour $\mathring{Y}^{\mathrm{sp}}$, où les deux membres calculent la cohomologie de de Rham de $\mathring{Y}^{\mathrm{sp}}$ vu comme espace de Berkovich et sont donc égaux. □

Remarque 3.21. — Les mêmes techniques permettent de prouver que, si on compactifie un short Y en une $\mathscr{O}_C$-courbe propre X en recollant des disques D_i le long des cercles fantômes C_i à la frontière, alors on peut calculer la cohomologie de de Rham de X en utilisant le recouvrement par Y et les D_i. On en déduit une suite exacte

$$0 \to H^1_{\mathrm{dR}}(X) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y) \oplus \prod_i H^1_{\mathrm{dR}}(D_i) \to \prod_i H^1_{\mathrm{dR}}(C_i) \to H^2_{\mathrm{dR}}(X)$$

4. Cohomologie des boules, des jambes et des cercles fantômes

Dans ce chapitre, on définit les symboles ℓ-adiques des jambes et des cercles fantômes. Si $\ell \neq p$, ces groupes ont une expression simple (et classique), et on relie (prop. 4.11) les symboles p-adiques à la cohomologie syntomique en se ramenant aux cas des boules unités ouverte et fermée. Le lien entre cette cohomologie syntomique et la cohomologie étale p-adique est exploré dans l'appendice.

4.1. Symboles ℓ-adiques

4.1.1. Fonctions inversibles. — Le lemme 4.2 et le cor. 4.3 sont parfaitement classiques, mais la preuve que nous en donnons est une bonne introduction aux méthodes utilisées dans l'article.

On munit $\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}[[T]]$ du frobenius $\varphi(\sum_{n\geq 0} a_n T^n) = \sum_{n\geq 0} \varphi(a_n) T^{pn}$.

Lemme 4.1. — Soit $\tilde{u} \in 1 + T\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}[[T]]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
a) $\tilde{u} \in 1 + T\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$,
b) $\frac{\varphi(\tilde{u})}{\tilde{u}^p} \in 1 + pT\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$.
c) $\log \frac{\varphi(\tilde{u})}{\tilde{u}^p} \in pT\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$.

Démonstration. — L'implication a)⇒b) est immédiate ainsi que l'équivalence de b) et c). Il ne reste donc que b)⇒a) à prouver. On peut écrire $\tilde{u}$ sous la forme $\tilde{u} = \prod_{n\geq 1}(1+u_nT^n)$, et on montre, par récurrence que $u_n \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$: si

$$\tilde{u}_n = \tilde{u} \prod_{i\leq n-1} (1+u_iT)^{-1},$$

l'hypothèse de récurrence permet de montrer que $\frac{\varphi(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n^p} \in 1 + pT\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$. Or le terme de degré n est juste $-pu_n$, et donc $u_n \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. □

Lemme 4.2. — (i) Tout élément u de $(\mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle[\frac{1}{p}])^*$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $u = cT^k u_+ u_-$, avec $k \in \mathbf{Z}$, $c \in C^*$, $u_+ \in 1 + T\mathscr{O}_C[[T]]$ et $u_- \in 1 + T^{-1}\mathfrak{m}_C\langle T^{-1}\rangle$.

(ii) $(v(u), v'(u)) := (v_p(c), k)$ ne dépend pas du choix de l'uniformisante T.

Démonstration. — L'unicité d'une telle écriture est claire : si $aT^k u_+u_- = bT^\ell v_+v_-$ avec $k \geq \ell$, alors $\frac{v_-}{u_-} = \frac{a}{b}T^{k-\ell}\frac{u_+}{v_+}$, d'où l'on déduit que $v_- = u_-$ (car le membre droite appartient à $\mathscr{O}_C[[T]][\frac{1}{p}]$ et celui de gauche à $1 + T^{-1}\mathfrak{m}_C\langle T^{-1}\rangle$ et l'intersection de ces deux ensembles est réduite à $\{1\}$), puis que $k = \ell$ et $a = b$ (regarder le terme constant du membre de droite), et donc $u_+ = v_+$ aussi.

Prouvons l'existence. En utilisant la théorie des polygones de Newton, on prouve que $u = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_nT^n \in \mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle[\frac{1}{p}]$ est inversible si et seulement si $\inf_{n\in\mathbf{Z}} v_p(c_n)$ est atteint. Si on note k le minimum des n pour lesquels $v_p(c_n)$ est minimum, on peut écrire u sous la forme $c_kT^ku_0$, avec $u_0 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_nT^n$, avec $a_n \in \mathscr{O}_C$ pour tout n, $a_0 = 1$, $a_n \in \mathfrak{m}_C$ si $n < 0$ et $a_n \to 0$ quand $n \to -\infty$.

Relevons u_0 en $\tilde{u}_0 \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T,T^{-1}\rangle$ (par exemple en posant $\tilde{u}_0 = \sum_{n\in\mathbf{Z}}[a_n^\flat]T^n$). Alors $\tilde{u}_0$ est inversible et donc on peut écrire $\frac{d\tilde{u}_0}{\tilde{u}_0} = a\frac{dT}{T} + f_+\frac{dT}{T} + f_-\frac{dT}{T}$, avec $a \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, $f_+ \in T\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$ et $f_- \in T^{-1}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T^{-1}\rangle$.

On a $\frac{\varphi(\tilde{u}_0)}{\tilde{u}_0^p} \in 1+p\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T,T^{-1}\rangle$ et on peut donc écrire $\log\frac{\varphi(\tilde{u}_0)}{\tilde{u}_0^p} = p(b+g_+ + g_-)$, avec $b \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, $g_+ \in T\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$ et $g_- \in T^{-1}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T^{-1}\rangle$, et on a $dg_+ + dg_- = (\frac{\varphi}{p}-1)(a+f_+ + f_-)\frac{dT}{T}$ et comme $\varphi(T)$ respecte la décomposition en puissances positives et négatives de T, on en déduit que $dg_+ = (\frac{\varphi}{p}-1)f_+\frac{dT}{T}$.

Posons $\tilde{u}_+ = \exp(\int f_+\frac{dT}{T}) \in 1+T\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}[[T]]$. On a $\log\frac{\varphi(\tilde{u}_+)}{(\tilde{u}_+)^p} = pg_+ \in p\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$. Il en résulte, grâce au lemme 4.1, que $\tilde{u}_+ \in 1+\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$, et donc, si $u_+ = \theta(\tilde{u}_+)$, on a $u_+ \in 1+T\mathscr{O}_C[[T]]$. De plus, par construction, $\frac{du_0}{u_0} - \frac{du_+}{u_+} = \theta(a+f_-)\frac{dT}{T} \in \mathscr{O}_C\langle T^{-1}\rangle\frac{dT}{T}$, et donc $v = \frac{u_0}{u_+} \in \mathscr{O}_C\langle T^{-1}\rangle$ Si $v = \sum_{n\leq 0} b_nT^n$, il suffit alors de poser $c = c_kb_0$ et $u_- = \frac{v}{b_0}$ pour avoir la factorisation de u cherchée.

Pour prouver le (ii), posons $\Lambda = \mathscr{O}_C[[T,T^{-1}\rangle$ et $I = \mathfrak{m}_C[[T,T^{-1}\rangle$. Si $S \in \Lambda$ est tel que $\iota_S : \mathscr{O}_C[[S,S^{-1}\rangle \to \Lambda$ est un isomorphisme, alors l'image de $\mathfrak{m}_C[[S,S^{-1}\rangle$ est encore I et ι_S induit un isomorphisme $k_C((S)) \xrightarrow{\sim} k_C((T))$ par passage au quotient modulo I. Maintenant, $r = v_p(c)$ est caractérisé par l'appartenance de $p^{-r}u$ et p^ru^{-1} à Λ et k est la valuation T-adique de l'image de $p^{-r}u$ dans $k_C((T))$; c'est donc aussi la valuation S-adique de $p^{-r}u$ dans $k_C((S))$ au vu de l'isomorphisme ci-dessus. Il s'ensuit que (r,k) ne dépend que de u et pas du choix de T, comme voulu. □

On rappelle que si Y est une jambe ou un cercle fantôme on définit $\mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})$ comme étant $\mathscr{O}(Y)[\frac{1}{p}]$; on a donc $\mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^{**} = \mathscr{O}(Y)^{**}$.

Corollaire 4.3. — Si Y est une jambe, avec $\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}_C[[T_1,T_2]]/(T_1T_2-p^r)$, et si $u \in \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^*$, on peut écrire u, de manière unique, sous la forme $u = cT_1^ku_+u_-$, avec $k \in \mathbf{Z}$, $c \in C^*$, $u_+ \in 1+T_1\mathscr{O}_C[[T_1]]$ et $u_- \in 1+T_2\mathscr{O}_C[[T_2]]$.

Démonstration. — On a $\mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^* \subset (\mathscr{O}_C[[T_1,T_1^{-1}\rangle[\frac{1}{p}])^*$, ce qui fournit une factorisation de u sous la forme $u = cT_1^ku_+u_-$ avec $k \in \mathbf{Z}$, $c \in C^*$, $u_+ \in 1+T_1\mathscr{O}_C[[T_1]]$ et $u_- \in 1+T_1^{-1}\mathfrak{m}_C\langle T_1^{-1}\rangle$. Mais

$$u_- = c^{-1}T_1^{-k}(u^+)^{-1}u \Rightarrow u_- \in \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^* \cap \left(1+T_1^{-1}\mathscr{O}_C\langle T_1^{-1}\rangle\right) = 1+T_2\mathscr{O}_C[[T_2]],$$

ce qui permet de conclure. □

4.1.2. Symboles. — Si Y est un cercle fantôme une jambe ou la boule unité fermée, on pose

$$\mathrm{Symb}_\ell(Y^{\mathrm{gen}}) = \mathbf{Z}_\ell \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^*.$$

Si Y est une jambe ou la boule unité fermée, on définit $A_{\ell,n}(Y^{\mathrm{gen}})$ comme le sous-groupe de $C(Y^{\mathrm{gen}})^*$ des f dont le diviseur est à support fini (ceci est automatique dans le cas de la boule) et divisible par ℓ^n.

Lemme 4.4. — On a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Symb}_\ell(Y^{\mathrm{gen}}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \left(A_{\ell,n}(Y^{\mathrm{gen}})/(C(Y^{\mathrm{gen}})^*)^{\ell^n}\right)$$

Démonstration. — L'injectivité est une conséquence de ce que, si $f \in \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^*$ et si $f = g^{\ell^n}$ avec $g \in C(Y^{\mathrm{gen}})^*$, alors $g \in \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^*$ puisque $\mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})$ est normal (ou bien en remarquant que g n'a ni zéro ni pôle sur Y). Pour la surjectivité soit $f = (f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément du membre de droite. Puisque tout diviseur de support fini est principal, il existe $h_n \in C(Y^{\mathrm{gen}})^*$ tel que $u_n := f_n h_n^{-\ell^n} \in \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^*$. Or $f_{n+1}/f_n \in (C(Y^{\mathrm{gen}})^*)^{\ell^n}$, donc $u_{n+1}/u_n \in (C(Y^{\mathrm{gen}})^*)^{\ell^n}$ et en utilisant encore la normalité de $\mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})$ on obtient $u_{n+1}/u_n \in (\mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^*)^{\ell^n}$. Ainsi $(u_n)_n$ induit un élément de $\mathbf{Z}_\ell \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^*$ s'envoyant sur $(f_n)_n$, ce qui permet de conclure. □

Proposition 4.5. — Si Y est une jambe ou un cercle fantôme, et si $\ell \neq p$, l'application résidu [31] induit un isomorphisme

$$\mathrm{Res} : \mathrm{Symb}_\ell(Y^{\mathrm{gen}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_\ell.$$

Démonstration. — Il ressort du lemme 4.2 et du cor. 4.3 (et de ce que C^* est ℓ-divisible) que l'on a des isomorphismes

$$\mathbf{Z}_\ell \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^* \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_\ell \oplus (\mathbf{Z}_\ell \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(\mathring{B})^*) \oplus (\mathbf{Z}_\ell \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(\mathring{B})^*) & \text{si } Y \text{ est une jambe,} \\ \mathbf{Z}_\ell \oplus (\mathbf{Z}_\ell \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(\mathring{B})^*) \oplus (\mathbf{Z}_\ell \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(B)^{**}) & \text{si } Y \text{ est un cercle fantôme} \end{cases}$$

On conclut en remarquant que $1 + X\mathscr{O}_C[[X]]$ et $1 + X\mathfrak{m}_C\langle X\rangle$ sont tous les deux ℓ-divisibles si $\ell \neq p$ car la série $\sum_{k\geq 0} \binom{1/\ell}{k}(x-1)^k$ converge dans les deux cas. □

4.2. Régulateur syntomique

4.2.1. Le régulateur. — Si Y est une jambe (avec $\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}_C[[T_1, T_2]]/(T_1T_2 - p^r)$), on pose $\mathscr{O}(\widetilde{Y}) = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T_1, T_2]]/(T_1T_2 - \tilde{p}^r)$ comme au n° 3.3.2. Si Y est un cercle fantôme (avec $\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}_C[[T, T^{-1}\rangle)$, on pose $\mathscr{O}(\widetilde{Y}) = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T, T^{-1}\rangle$. Si Y est la boule unité ouverte $\mathring{B}$ (et donc $\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}_C[[T]]$), on pose $\mathscr{O}(\widetilde{Y}) = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$, et si Y est la boule unité fermée B (i.e. $\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}_C\langle T\rangle$), on pose $\mathscr{O}(\widetilde{Y}) = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$.

Dans tous les cas :

• On dispose d'une surjection $\mathscr{O}(\widetilde{Y}) \to \mathscr{O}(Y)$ et on note $F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y})$ le noyau.

• On munit $\mathscr{O}(\widetilde{Y})$ du frobenius φ, agissant comme on pense sur $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, et par $T_i \mapsto T_i^p$ ou $T \mapsto T^p$ suivant les cas.

• On note $\Omega^1(\widetilde{Y})$ le module des différentielles continues de $\mathscr{O}(\widetilde{Y})$ relativement à $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. On a donc $\Omega^1(\widetilde{Y}) = \mathscr{O}(\widetilde{Y})\frac{dZ}{Z}$ avec $Z = T_1$ (resp. $Z = T$) si Y est une jambe (resp. un cercle fantôme), et on a $\Omega^1(\widetilde{Y}) = \mathscr{O}(\widetilde{Y})dT$ si $Y = B$ ou $Y = \mathring{B}$.

31. Obtenue, par continuité, à partir de $f \mapsto \mathrm{Res}_Y \frac{df}{f}$.

Si $Y = \mathring{B}, B$, une jambe ou un cercle fantôme, les groupes de cohomologie syntomique $H^i_{\text{syn}}(Y,1)$, sont les groupes de cohomologie du complexe (notons que $\varphi(F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y})) \subset p\mathscr{O}(\widetilde{Y})$ et $\varphi(\Omega^1(\widetilde{Y})) \subset p\Omega^1(\widetilde{Y})$, ce qui donne un sens à $\frac{\varphi}{p}$) :

$$\text{Syn}(Y,1) := \ F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y}) \xrightarrow{d,1-\frac{\varphi}{p}} \Omega^1(\widetilde{Y}) \oplus \mathscr{O}(\widetilde{Y}) \xrightarrow{(1-\frac{\varphi}{p})-d} \Omega^1(\widetilde{Y}) \ .$$

Remarquons que, dans tous les cas, un élément de H^0 est une constante (car tué par d) appartenant à $(F^1\text{A}_{\text{cris}})^{\varphi=p}$, et donc

$$H^0_{\text{syn}}(Y,1) = \text{Z}_p t.$$

Comme $\text{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} C^* = 0$, on peut écrire $u \in \text{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y^{\text{gen}})^*$ sous la forme $\prod_{n\geq 0}(T^{a_n}u_n^{p^n})$, avec $a_n \in \text{Z}$ (et $a_n = 0$ si $Y = \mathring{B}, B$) et $u_n \in \mathscr{O}(Y)^*$. Si on choisit un relèvement $\tilde{u}_n$ de u_n dans $\mathscr{O}(\widetilde{Y})^*$, et si on pose $a = \sum_{n\geq 0} p^n a_n$ et

$$x = a\tfrac{dT_1}{T_1} + \sum_{n\geq 0} p^n \tfrac{d\tilde{u}_n}{\tilde{u}_n} \quad \text{et} \quad y = \tfrac{1}{p}\sum_{n\geq 0} p^n \log \tfrac{\varphi(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n^p},$$

alors (x,y) est un 1-cocycle de $\text{Syn}(Y,1)$. Comme $\tilde{u}_n$ est bien déterminé à un élément de $1 + F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y})$ près, la classe de (x,y) dans $H^1_{\text{syn}}(Y,1)$ ne dépend que de u, et pas du choix des $\tilde{u}_n$ (car $(\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}}, \frac{1}{p}\log\frac{\tilde{v}^p}{\varphi(\tilde{v})})$ est le bord de $\log\tilde{v}$ qui appartient à $F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y})$ si $v \in 1 + F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y})$ puisque $F^1\text{A}_{\text{cris}}$ admet des puissances divisées). Elle définit donc une application

$$\delta_Y : \text{Symb}_p(Y^{\text{gen}}) \cong \text{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y^{\text{gen}})^* \to H^1_{\text{syn}}(Y,1).$$

4.2.2. La boule ouverte. — Dans ce cas, $1+T\mathscr{O}_C[[T]]$ est complet pour la topologie p-adique, et l'application naturelle $1 + T\mathscr{O}_C[[T]] \to \text{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(\mathring{B}^{\text{gen}})^*$ est un isomorphisme. On peut donc définir $\delta_{\mathring{B}}$ sans passage à la limite : si $u \in 1 + T\mathscr{O}_C[[T]]$, on choisit un relèvement $\tilde{u}$ de u dans $1 + T\text{A}_{\text{cris}}[[T]]$ (i.e $\theta(\tilde{u}) = u$), et alors $\big(\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}}, \frac{1}{p}\log\frac{\tilde{u}^p}{\varphi(\tilde{u})}\big)$ définit un 1-cocycle de $\text{Syn}(\mathring{B},1)$: on a $\frac{\tilde{u}^p}{\varphi(\tilde{u})} \in 1 + pT\text{A}_{\text{cris}}[[T]]$, et donc $\frac{1}{p}\log\frac{\tilde{u}^p}{\varphi(\tilde{u})} \in \text{A}_{\text{cris}}[[T]]$. Ce cocycle est le cobord de $\log\tilde{u}$ qui n'appartient à $F^1\text{A}_{\text{cris}}[[T]]$ que si $u = 1$. On a donc construit une injection naturelle

$$\delta_{\mathring{B}} : 1 + T\mathscr{O}_C[[T]] \hookrightarrow H^1_{\text{syn}}(\mathring{B},1).$$

Proposition 4.6. — On a $H^0_{\text{syn}}(\mathring{B},1) = \text{Z}_p t$, $H^2_{\text{syn}}(\mathring{B},1) = 0$ et $\delta_{\mathring{B}}$ induit un isomorphisme

$$\delta_{\mathring{B}} : 1 + T\mathscr{O}_C[[T]] \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{syn}}(\mathring{B},1).$$

Démonstration. — La nullité de H^2 résulte de ce que $1 - T^{p-1}\varphi$ est surjectif sur $\text{A}_{\text{cris}}[[T]]$ (et même bijectif, d'inverse $1 + T^{p-1}\varphi + (T^{p-1}\varphi)^2 + \cdots$), ce qui implique que $1 - \frac{\varphi}{p}$: $\Omega^1(\tilde{\mathring{B}}) \to \Omega^1(\tilde{\mathring{B}})$ est surjectif.

Maintenant, on a

$$\text{Syn}(\mathring{B},1) = \text{Syn}(\mathring{B},1)^+ \oplus C_0^\bullet,$$

où

$$\mathrm{Syn}(\mathring{B},1)^+ := \ F^1\mathscr{O}(\tilde{\mathring{B}})_0 \xrightarrow{d,1-\frac{\varphi}{p}} \Omega^1(\tilde{\mathring{B}}) \oplus \mathscr{O}(\tilde{\mathring{B}})_0 \xrightarrow{(1-\frac{\varphi}{p})-d} \Omega^1(\tilde{\mathring{B}})$$

avec $\mathscr{O}(\tilde{\mathring{B}})_0 = T\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$, et

$$C_0^\bullet = [\ F^1\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{1-\frac{\varphi}{p}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \longrightarrow 0\ ].$$

On a $H^0(C_0^\bullet) = \mathrm{Z}_p t$, $H^1(C_0^\bullet) = 0$ et $H^0(\mathrm{Syn}(\mathring{B},1)^+) = 0$. Pour conclure, il suffit donc de prouver que l'injection $\delta_{\mathring{B}} : 1 + T\mathscr{O}_C[[T]] \hookrightarrow H^1(\mathrm{Syn}(\mathring{B},1)^+)$ est une surjection. Soit donc (x,y) un 1-cocycle de $\mathrm{Syn}(\mathring{B},1)^+$, avec $x = \big(\sum_{n\geq 0} x_n T^n\big)dT$, $y = \sum_{n\geq 1} y_n T^n$. Soit $f = \sum_{n\geq 1} \frac{x_{n-1}}{n} T^n$ de telle sorte que $f \in T\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}[[T]]$ vérifie $df = x$, et soit $\tilde{u} = \exp f \in 1 + T\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}[[T]]$. Il s'agit de prouver qu'en fait $\tilde{u} \in 1 + T\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$ car alors $(x,y) = \delta_{\mathring{B}}(\theta(\tilde{u}))$.

Or $(1-\frac{\varphi}{p})f = y$ car les deux membres ont même terme constant (i.e. 0) et même différentielle puisque

$$d\big((1-\tfrac{\varphi}{p})f\big) = (1-\tfrac{\varphi}{p})\cdot df = (1-\tfrac{\varphi}{p})x = dy,$$

et donc $\varphi(f) - pf = py \in pT\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$ et $\frac{\varphi(\tilde{u})}{\tilde{u}^p} \in 1 + pT\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T]]$, ce qui permet d'utiliser le lemme 4.1 pour conclure. □

4.2.3. La boule fermée. — Soit B la boule fermée. Alors

$$\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(B^{\mathrm{gen}})^* = \mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} (1 + T\mathfrak{m}_C\langle T\rangle).$$

Soit $\mathfrak{m}_{\mathrm{cris}} = \{x \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}},\ \theta(x) \in \mathfrak{m}_C\}$.

Proposition 4.7. — $H^2_{\mathrm{syn}}(B,1) = \mathrm{Z}_p t$, $H^2_{\mathrm{syn}}(B,1) = 0$ et δ_B induit un isomorphisme

$$\delta_B : \mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(B^{\mathrm{gen}})^{**} \cong H^1_{\mathrm{syn}}(B,1),$$

si $p > 2$ (si $p = 2$, δ_B est presque un isomorphisme [32]).

Démonstration. — Le calcul de H^0 a déjà été fait. Pour prouver la nullité de H^2, il suffit de montrer que $T^k dT \in (1-\varphi/p)\Omega^1(\widetilde{B}) + d\mathscr{O}(\widetilde{B})$ pour tout k. En écrivant $k+1 = p^i n$ avec n premier à p et en posant $f_n = \frac{T^n}{n}$, on a

$$T^k dT = df_n + (1-\varphi/p)\omega, \quad \omega := -\sum_{j=0}^{i-1} (\varphi/p)^j (df_n).$$

L'injectivité de δ_B se démontre comme pour la boule ouverte. La surjectivité est nettement plus délicate et demande quelques préliminaires, qui seront aussi utilisés dans le chapitre 5.

Lemme 4.8. — Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, qui tendent vers 0 et telles que $b_n = \varphi^n(a_0) + p\varphi^{n-1}(a_1) + \ldots + p^n a_n$ pour tout n. Alors $\theta_0(b_n)/p^{n+1} \in \mathscr{O}_{\breve{C}}$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} \theta_0(b_n)/p^{n+1} = 0$.

32. Cela veut dire que δ_B est injectif et son conoyau est tué par 2.

Démonstration. — On a $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = \mathscr{O}_{\breve{C}} \oplus \mathrm{Ker}\,\theta_0$ et cette décomposition est φ-équivariante. En appliquant θ_0 à l'égalité

$$b_{n+s} = \varphi^s(b_n) + p^{n+1}\varphi^{s-1}(a_{n+1}) + \ldots + p^{n+s}a_{n+s}$$

et en passant à la limite pour $s \to \infty$, on obtient

$$v_p(\theta_0(b_n)) \geq \inf_{k \geq n+1}(k + v_p(\theta_0(a_k))),$$

ce qui permet de conclure puisque $\lim_{k\to\infty} v_p(\theta_0(a_k)) = \infty$. □

Lemme 4.9. — Si $p > 2$ et $a \in \ker(\theta_0)$, il existe $z \in TF^1\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$ tel que

$$\exp\big(z + \sum_{\ell\geq 0} p^{-\ell}\varphi^\ell(a)T^{p^\ell}\big) \in 1 + T\mathfrak{m}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle.$$

Si $a \in p^N \ker(\theta_0)$ on peut choisir un tel z dans $p^N TF^1\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$.

Démonstration. — Puisque $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{\tilde{p}^k}{k!}]^\wedge$, il existe une suite $x_k \in \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$ tendant vers 0 telle que $a = \sum_{k\geq 0} x_k \frac{\tilde{p}^k}{k!}$. Notons $a_1 = \sum_{k=0}^{p-1} x_k \frac{\tilde{p}^k}{k!}$ et $a_2 = a - a_1$. Puisque $\theta_0(a) = 0$, on a $x_0 \in W(\mathfrak{m}_{C^\flat})$ et donc $a_1 \in W(\mathfrak{m}_{C^\flat})$ aussi. En écrivant $a_1 = \sum_{k\geq 0} p^k[b_k]$ avec $b_k \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$, on obtient

$$\exp\big(\sum_{\ell\geq 0} p^{-\ell}\varphi^\ell(a_1)T^{p^\ell}\big) = \prod_{k\geq 0} \exp_{\mathrm{AH}}([b_k]T)^{p^k} \in 1 + T\mathfrak{m}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle,$$

puisque l'exponentielle d'Artin-Hasse

$$\exp_{\mathrm{AH}}(X) = \exp(\sum_{i\geq 0} p^{-i}X^{p^i})$$

appartient à $1 + X\mathbf{Z}_p[[X]]$.

Il suffit donc de démontrer le résultat pour a_2. La relation $\varphi(\tilde{p}) = \tilde{p}^p$ et l'inégalité $v_p(\frac{(p^\ell k)!}{k!}) = k\frac{p^\ell - 1}{p-1} \geq p^\ell$, valable pour $k \geq p$ et $\ell \geq 1$, montrent que la série $\sum_{\ell\geq 1} p^{-\ell}\varphi^\ell(a_2)T^{p^\ell}$ converge dans $p\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$ et, puisque $p > 2$, son exponentielle est dans $1 + T\mathfrak{m}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$. Il reste donc à montrer l'existence de $z \in TF^1\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$ tel que $\exp(z + a_2T) \in 1 + T\mathfrak{m}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$. Il suffit de poser $z = -\sum_{k\geq p} x_k \frac{\tilde{p}^k - p^k}{k!}T$ et de noter que $z + a_2T = \sum_{k\geq p} x_k \frac{p^k}{k!}T \in p\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$. □

Remarque 4.10. — Pour $p = 2$, la preuve ci-dessus tombe en défaut mais reste valable si on remplace a par $2a$.

Revenons à la preuve de la surjectivité. Soit (x, y) un 1-cocycle de $\mathrm{Syn}(B, 1)^+$, avec $x = \big(\sum_{n\geq 0} x_n T^n\big)dT$ et $y = \sum_{n\geq 1} y_n T^n$. En décomposant n sous la forme $n = p^i j$, avec $(j, p) = 1$, on peut écrire

$$x = \sum_{(j,p)=1} jp^{c(j)}b_j, \quad y = \sum_{(j,p)=1} p^{c(j)}a_j$$

avec $c(j) \to +\infty$ quand $j \to \infty$ et

$$b_j = \sum_{i\geq 0} b_{i,j} T^{jp^i-1} dT \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle dT, \quad a_j = \sum_{i\geq 0} a_{i,j} T^{jp^i} \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle.$$

Soit

$$f_j = \sum_{i\geq 0} \tfrac{b_{i,j}}{p^i} T^{jp^i}.$$

Il suffit de montrer l'existence de $z_j \in TF^1\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$ qui tendent vers 0 et tels que $\tilde{u}_j = \exp(z_j + f_j) \in 1 + T\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}[[T]]$ appartienne à $1 + T\mathfrak{m}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$, car alors $(x,y) = \delta_B(\prod_j \theta(\tilde{u}_j)^{p^{c(j)}})$ dans $H^1_{\mathrm{syn}}(B,1)$.

La relation $(1-\frac{\varphi}{p})x = dy$ se traduit par $b_{0,j} = a_{0,j}$ et $b_{i,j} = \varphi(b_{i-1,j}) + p^i a_{i,j}$ si $i \geq 1$. On a alors

$$b_{i,j} = \varphi^i(a_{0,j}) + p\varphi^{i-1}(a_{1,j}) + \cdots + p^i a_{i,j}.$$

Cela montre d'une part que

$$f_j = \sum_{k\geq 0} \big(\sum_{\ell \geq 0} p^{-\ell}\varphi^\ell(a_{k,j}) T^{jp^{k+\ell}} \big)$$

et d'autre part (lemme 4.8) que $\sum_{i\geq 1} \theta_0(b_{i,j}) p^{-i} T^{jp^i}$ converge dans $p\mathscr{O}_{\check{C}}\langle T\rangle$, donc son exponentielle appartient à $1 + T\mathfrak{m}_{\mathrm{cris}}\langle T\rangle$ (si $p=2$, il faut multiplier x et y par 2 pour assurer cette appartenance). En utilisant la décomposition φ-équivariante $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = \mathscr{O}_{\check{C}} \oplus \mathrm{Ker}\,\theta_0$ on peut ainsi se ramener au cas $a_{i,j} \in \ker(\theta_0)$ pour tous i,j. Comme $a_{k,j} \to 0$ dans $\mathrm{Ker}\,\theta_0$ (i.e. p-adiquement), il suffit d'appliquer le lemme 4.9 pour conclure. □

4.2.4. Jambes et cercles fantômes. — Soit Y une jambe ou un cercle fantôme (i.e. $\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}_C[[T_1,T_2]]/(T_1T_2 - p^r)$ ou $\mathscr{O}_C[[T_1, T_1^{-1}\rangle)$.

Proposition 4.11. — $H^0_{\mathrm{syn}}(Y,1) = \mathbf{Z}_p t$ et $\delta_Y : \mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}}) \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y,1)$ est un isomorphisme, si $p > 2$ (et presque un isomorphisme si $p=2$).

Démonstration. — Il ressort du lemme 4.2 et du cor. 4.3 (et de ce que C^* est p-divisible) que l'on a des isomorphismes

$$\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^* \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_p \oplus (\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(\mathring{B})^*) \oplus (\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(\mathring{B})^*) & \text{si } Y \text{ est une jambe,} \\ \mathbf{Z}_p \oplus (\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(\mathring{B})^*) \oplus (\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(B)^{**}) & \text{si } Y \text{ est un cercle fantôme.} \end{cases}$$

Le complexe $\mathrm{Syn}(Y,1)$ se décompose pareillement (en regardant le signe des puissances de T) sous la forme

$$\mathrm{Syn}(Y,1) \cong \begin{cases} \mathrm{Syn}(\mathring{B},1)^+ \oplus \mathrm{Syn}(\mathring{B},1)^+ \oplus C_1^\bullet & \text{si } Y \text{ est une jambe,} \\ \mathrm{Syn}(\mathring{B},1)^+ \oplus \mathrm{Syn}(B,1)^+ \oplus C_1^\bullet & \text{si } Y \text{ est un cercle fantôme,} \end{cases}$$

où $C_1^\bullet$ est le complexe

$$[\ F^1\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{(0,1-\frac{\varphi}{p})} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\tfrac{dT_1}{T_1} \oplus \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{(1-\frac{\varphi}{p})-(0)} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\tfrac{dT_1}{T_1}\ ].$$

On a $H^0(C_1^\bullet) = \mathbf{Z}_p t$ et $H^1(C_1^\bullet) = \mathbf{Z}_p \frac{dT_1}{T_1}$ (car $\varphi(\frac{dT_1}{T_1}) = p\frac{dT_1}{T_1}$). Cela permet de déduire le résultat de ceux pour les boules (prop. 4.6 pour la boule ouverte et prop. 4.7 pour la boule fermée). □

Remarque 4.12. — Si Y est la boule ouverte ou une jambe, la relation entre les $H^i_{\text{syn}}(Y,1)$ et les $H^i_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_p(1))$ est analysée dans l'appendice.

4.3. Dégénérescence de couronnes. — Les résultats de ce § et du suivant seront utilisés dans le chap. 6 pour les preuves de la prop. 6.12 et celle du th. 6.21 (via le lemme 6.19).

Soit Y une jambe, avec $\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}_C[[T_1, T_2]]/(T_1T_2 - p^r)$ et soient C_1, C_2 les cercles fantômes aux extrémités de Y, avec $\mathscr{O}(C_i) = \mathscr{O}_C[[T_i, T_i^{-1}\rangle$ si $i = 1, 2$.

4.3.1. Dégénérescence géométrique. — Soit Y^∞ la couronne singulière $\mathscr{O}(Y^\infty) = \mathscr{O}_C[[T_1, T_2]]/(T_1T_2)$. Les cercles fantômes aux extrémités de Y^∞ sont encore C_1 et C_2. Si $Z = Y, Y^\infty, C_i$, on définit $\Omega^1(Z)$ comme le module $\mathscr{O}(Z)\frac{dT_1}{T_1}$ (avec la relation $\frac{dT_2}{T_2} = -\frac{dT_1}{T_1}$). Soit $\Omega^\bullet(Z)$ le complexe

$$\Omega^\bullet(Z) = \big(\mathscr{O}(Z) \to \Omega^1(Z)\big).$$

Notons que tout élément de $\mathscr{O}(Y^\infty)$ ou $\mathscr{O}(Y)$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n T_1^n + \sum_{n\geq 1} b_n T_2^n$. De même, tout élément de $\Omega^1(Y^\infty)$ ou $\Omega^1(Y)$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $\big(a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n T_1^n + \sum_{n\geq 1} b_n T_2^n\big)\frac{dT_1}{T_1}$. Cela fournit un isomorphisme naturel de complexes $\Omega^\bullet(Y^\infty) \cong \Omega^\bullet(Y)$.

Le problème que nous allons rencontrer est que cet isomorphisme ne commute pas aux flèches naturelles vers $\Omega^\bullet(C_i)$. Pour remédier à ce problème, on introduit le quotient $\overline{\Omega}^\bullet(C_i)$ de $\Omega^\bullet(C_i)$ défini par :

$$\overline{\Omega}^\bullet(C_i) = \Omega^\bullet(C_i)/\big(T_i^{-1}\mathscr{O}_C\langle T_i^{-1}\rangle \to d(T_i^{-1}\mathscr{O}_C\langle T_i^{-1}\rangle)\big).$$

(Le complexe $T_i^{-1}\mathscr{O}_C\langle T_i^{-1}\rangle \to d(T_i^{-1}\mathscr{O}_C\langle T_i^{-1}\rangle)$ est acyclique et donc $\overline{\Omega}^\bullet(C_i)$ est quasi-isomorphe à $\Omega^\bullet(C_i)$.)

Lemme 4.13. — Si $p^N r \geq 1$, le diagramme suivant commute à p^{N-1} près :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(Y^\infty) & \longrightarrow & \overline{\Omega}^\bullet(C_i) \\ \downarrow & & \| \\ \Omega^\bullet(Y) & \longrightarrow & \overline{\Omega}^\bullet(C_i) \end{array}$$

Démonstration. — On peut supposer que $i = 1$. Alors $T_1^n \in \mathscr{O}(Y^\infty)$, pour $n \geq 0$, s'envoie sur T_1^n, que ce soit par $\mathscr{O}(Y^\infty) \to \mathscr{O}(C_1)$ ou par $\mathscr{O}(Y^\infty) \to \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(C_1)$. Quant à T_2^n, pour $n \geq 1$, il s'envoie sur 0 par $\mathscr{O}(Y^\infty) \to \mathscr{O}(C_1)$ et sur $p^{nr}T_1^{-n}$ par $\mathscr{O}(Y^\infty) \to \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(C_1)$, et donc sur 0 si on quotiente par $T_1^{-1}\mathscr{O}_C\langle T_1^{-1}\rangle$.

De même, $T_1^n\frac{dT_1}{T_1}$, pour $n \geq 0$, s'envoie sur $T_1^n\frac{dT_1}{T_1}$ par les deux chemins. Par contre, $T_2^n\frac{dT_1}{T_1}$, pour $n \geq 1$, s'envoie sur 0 par $\Omega^1(Y^\infty) \to \Omega^1(C_1)$ et sur $p^{nr}T_1^{-n}\frac{dT_1}{T_1}$ par $\Omega^1(Y^\infty) \to \Omega^1(Y) \to \Omega^1(C_1)$. Or $p^{nr}T_1^{-n}\frac{dT_1}{T_1} = -d(\frac{p^{nr}}{n}T_1^{-n})$, et on vérifie (il suffit de

considérer $n = p^k$) que $p^{N-1}\frac{p^{nr}}{n} \in \mathbf{Z}_p$, pour tout $n \geq 1$, si $p^N r \geq 1$, et donc $p^{N-1}T_2^n\frac{dT_1}{T_1}$ s'envoie sur 0 si on quotiente par $d(T_1^{-1}\mathscr{O}_C\langle T_1^{-1}\rangle)$. □

4.3.2. Dégénérescence arithmétique. — On pose

$$\mathscr{O}(\widetilde{Y}) = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T_1, T_2]]/(T_1T_2 - \tilde{p}^r) \quad \text{et} \quad \mathscr{O}(\breve{Y}) = \mathscr{O}_{\breve{C}}[[T_1, T_2]]/(T_1T_2).$$

On a

$$\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}_C \otimes_{\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}} \mathscr{O}(\widetilde{Y}) \quad \text{et} \quad \mathscr{O}(\breve{Y}) = \mathscr{O}_{\breve{C}} \otimes_{\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}} \mathscr{O}(\widetilde{Y}).$$

Si h est [33] un entier ≥ 0, et si $i = 1, 2$, on définit $\mathscr{O}(\widetilde{C}_i)^{\mathrm{PD}_h}$ et $\mathscr{O}(\breve{C}_i)^{\mathrm{PD}_h}$ comme les complétés p-adiques [34]

$$\mathscr{O}(\widetilde{C}_i)^{\mathrm{PD}_h} = \big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T_i, T_i^{-1}\rangle[\tfrac{U^k}{[k/p^h]!},\ k \in \mathbf{N}]\big)^{\wedge\text{-}p}$$
$$\mathscr{O}(\breve{C}_i)^{\mathrm{PD}_h} = \big(\mathscr{O}_{\breve{C}}[[T_i, T_i^{-1}\rangle[\tfrac{U^k}{[k/p^h]!},\ k \in \mathbf{N}]\big)^{\wedge\text{-}p}$$

On définit les modules $\Omega^1(\widetilde{C}_i)^{\mathrm{PD}_h}$ et $\Omega^1(\breve{C}_i)^{\mathrm{PD}_h}$ comme les modules des différentielles continues sur $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ respectivement, et on définit les complexes

$$\Omega^{\tau\leq 1}(\widetilde{C}_i) = \big(\mathscr{O}(\widetilde{C}_i)^{\mathrm{PD}_h} \to \Omega^1(\widetilde{C}_i)^{\mathrm{PD}_h}_{d=0}\big), \quad \Omega^{\tau\leq 1}(\breve{C}_i) = \big(\mathscr{O}(\breve{C}_i)^{\mathrm{PD}_h} \to \Omega^1(\breve{C}_i)^{\mathrm{PD}_h}_{d=0}\big),$$

Ces complexes calculent la cohomologie de de Rham de $\widetilde{C}_i$ et $\breve{C}_i$ (à p^h près), mais comme ci-dessus, nous aurons besoin d'un quotient quasi-isomorphe. Si $Z = \widetilde{C}_i, \breve{C}_i$, et si $\Lambda_Z = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ si $Z = \widetilde{C}_i$ et $\Lambda_Z = \mathscr{O}_{\breve{C}}$ si $Z = \breve{C}_i$, on pose :

$$\overline{\Omega}^{\tau\leq 1}(Z) = \Omega^{\tau\leq 1}(Z)/\big(T_i^{-1}\Lambda_Z\langle T_i^{-1}\rangle \to d\big(T_i^{-1}\Lambda_Z\langle T_i^{-1}\rangle\big)\big).$$

Lemme 4.14. — Si $p^N r \geq 1$, le diagramme suivant commute à p^N près :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(\breve{Y}) & \longrightarrow & \overline{\Omega}^{\tau\leq 1}(\breve{C}_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^\bullet(\widetilde{Y}) & \longrightarrow & \overline{\Omega}^{\tau\leq 1}(\widetilde{C}_i) \end{array}$$

Démonstration. — La preuve est la même que celle du lemme 4.13 à la petite différence près qu'il faut utiliser l'appartenance de $p^N\frac{\tilde{p}^{nr}}{n}$ à $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, si $p^N r \geq 1$ (cela résulte de ce que $\tilde{p}^p \in p\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$). □

---

33. Nous n'aurons besoin que de $h = 0$ dans cet article sauf dans le n° 6.3.5 pour passer du complexe définissant la cohomologie de Hyodo-Kato à un complexe quasi-isomorphe sur lequel l'isomorphisme de Hyodo-Kato devient transparent.

34. PD_h réfère à "puissances divisées partielles de niveau h" ; si $h = 0$, on obtient les puissances divisées standard. Le U et ses puissances divisées n'ont d'intérêt que dans une situation où le cercle fantôme est l'intersection d'une jambe Y et d'un short Y', et on veut mettre un frobenius sur le complexe de de Rham, ce qui demande de travailler dans $\widetilde{Y} \times \widetilde{Y}'$ et de prendre un PD_h-voisinage de l'intersection ; le lemme de Poincaré permet de montrer que rajouter U ne change pas la cohomologie de de Rham de $\widetilde{C}_i$, à p^h près.

5. Cohomologie des shorts

Dans ce chapitre, le plus technique de l'article, on calcule la cohomologie des affinoïdes ayant bonne réduction : on exprime la cohomologie étale ℓ-adique en termes de symboles (cor. 5.5), et on en déduit, si $\ell \neq p$, une expression de cette cohomologie étale en termes de la jacobienne de la réduction (prop. 5.10, résultat parfaitement classique). Dans le cas $\ell = p$, on relie les symboles à la cohomologie syntomique via un régulateur syntomique (n° 5.2.2) et on prouve un dévissage de la cohomologie étale faisant intervenir la cohomologie de de Rham séparée (cor. 5.22). Enfin, dans le cas des petits shorts, on prouve que le régulateur syntomique est un isomorphisme (th. 5.34), ce qui nous permettra d'étendre les résultats au cas de mauvaise réduction dans le chapitre suivant.

5.1. Cohomologie étale des courbes quasi-compactes

Soit Y une courbe quasi-compacte définie sur C. Rappelons que cela signifie que Y est lisse, irréductible, et que Y est propre ou affinoïde. Soit $C(Y)$ le corps des fonctions méromorphes sur Y.

5.1.1. Groupe de Picard. — Soit $\mathrm{Div}(Y)$ le Z-module libre de base $Y(C)$. Soit $\mathrm{Pic}(Y)$ le quotient de $\mathrm{Div}(Y)$ par le sous-Z-module des $\mathrm{Div}(f)$, pour $f \in \mathrm{Frac}(\mathscr{O}(Y))$. Si $D \in \mathrm{Div}(Y)$, et si les U_i forment un recouvrement de Y par des affinoïdes, tels que $D = \mathrm{Div}(f_i)$ sur U_i, alors $f_{i,j} = f_i/f_j \in \mathscr{O}(U_i \cap U_j)^*$ et les $f_{i,j}$ définissent un élément $[D]$ de $H^1(Y, \mathscr{O}^*)$ qui ne dépend que de D, et l'application $D \mapsto [D]$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Pic}(Y)$ sur $H^1(Y, \mathscr{O}^*)$.

Soit X une compactification de Y par recollement de disques ouverts D_i le long des éléments $C_0, \dots, C_r$ de $\partial^{\mathrm{ad}} Y$ (si Y est propre, alors $\partial^{\mathrm{ad}} Y = \varnothing$ et $X = Y$, bien sûr). Alors X est l'analytification d'une courbe algébrique propre, encore notée X.

Choisissons $P_0 \in X(C)$ (si Y n'est pas compact, on prend pour P_0 le centre de D_0). Soient J la jacobienne de la courbe algébrique X (le groupe $J(C)$ est alors naturellement un groupe de Lie sur C), $\iota : X \to J$ le plongement envoyant P sur la classe de $P - P_0$, et H le sous-groupe de $J(C)$ engendré par les $\iota(D_i)$.

Si Y est propre, l'application $\sum_P n_P P \mapsto \left(\sum_P n_P \iota(P), \sum_P n_P\right)$ induit un isomorphisme $\mathrm{Pic}(Y) \cong (J(C) \times \mathbf{Z})$; si Y n'est pas propre, on a le résultat suivant :

Proposition 5.1. — (van der Put [48]) Si Y n'est pas propre, l'application $\sum_P n_P P \mapsto \sum_P n_P \iota(P)$ induit un isomorphisme $J(C)/H \cong \mathrm{Pic}(Y)$.

Remarque 5.2. — Supposons Y non propre (et donc Y est un affinoïde).

(i) H est un sous-groupe ouvert de $J(C)$, cf. [48].

(ii) Si $C = \mathbf{C}_p$, alors $J(C)/H$ est un groupe de torsion (cf. [6, th.4.1] ou [12, th.3] pour une preuve plus élémentaire) ; il en est donc de même de $\mathrm{Pic}(Y)$.

(iii) $\mathrm{Pic}(Y)$ est p-divisible (puisque $J(C)$ l'est). Puisque $H^2(Y, \mathbf{G}_m) = 0$ (cf. [4, lemma 6.1.2]), la suite de Kummer montre que $H^2(Y, \boldsymbol{\mu}_p) = 0$ (voir aussi [4, cor. 6.1.3]).

5.1.2. La suite de Kummer. — Si ℓ est un nombre premier, et si $M = \mathbf{Z}/\ell^n, \mathbf{Z}_\ell, \mathbf{Q}_\ell$, les groupes de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(Y, M(1))$ sont, par définition, reliés par :

$$H^i_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) = \mathbf{Q}_\ell \otimes H^i_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1)), \quad H^i_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1)) = \varprojlim H^i_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}/\ell^n(1)).$$

La suite exacte $0 \to \mathbf{Z}/\ell^n(1) \to \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m \to 0$ induit la suite exacte de Kummer :

$$0 \to (\mathbf{Z}/\ell^n) \otimes \mathscr{O}(Y)^* \to H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}/\ell^n(1)) \to \text{Pic}(Y)[\ell^n] \to 0.$$

En prenant une limite projective sur n, puis en inversant ℓ, on obtient les suites exactes :

$$0 \to \mathbf{Z}_\ell \widehat{\otimes} \mathscr{O}(Y)^* \to H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1)) \to T_\ell(\text{Pic}(Y)) \to 0,$$
$$0 \to \mathbf{Q}_\ell \widehat{\otimes} \mathscr{O}(Y)^* \to H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to V_\ell(\text{Pic}(Y)) \to 0.$$

Remarque 5.3. — Les $\mathbf{Z}_\ell$-modules $\mathbf{Z}_\ell \widehat{\otimes} \mathscr{O}(Y)^*$ et $T_\ell(\text{Pic}(Y))$ sont sans torsion et complets pour la topologie ℓ-adique ; il en est donc de même de $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1))$. Il s'ensuit que $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est un $\mathbf{Q}_\ell$-banach dont la boule unité est $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1))$.

5.1.3. Description de la cohomologie étale en termes de symboles. — Soit $A_{\ell,n}(Y)$ le groupe

$$A_{\ell,n}(Y) = \{f \in C(Y)^*,\ \text{Div}(f) \in \ell^n \text{Div}(Y)\}.$$

Si $f \in A_{\ell,n}(Y)$, on associe à f sa classe de Kummer $c_n(f)$ dans $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}/\ell^n(1))$ (comme $\text{Div}(f) \in \ell^n \text{Div}(Y)$, l'algèbre obtenue en rajoutant f^{1/ℓ^n} est étale sur $\mathscr{O}(Y)$).

Lemme 5.4. — c_n induit un isomorphisme :

$$A_{\ell,n}(Y)/(C(Y)^*)^{\ell^n} \cong H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}/\ell^n(1)).$$

Démonstration. — L'application $f \mapsto \ell^{-n}\text{Div}(f)$ induit une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}(Y)^*/(\mathscr{O}(Y)^*)^{\ell^n} \to A_{\ell,n}(Y)/(C(Y)^*)^{\ell^n} \to \text{Pic}(Y)[\ell^n] \to 0.$$

On en déduit le diagramme commutatif suivant dans lequel les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y)^*/(\mathscr{O}(Y)^*)^{\ell^n} & \longrightarrow & A_{\ell,n}(Y)/(C(Y)^*)^{\ell^n} & \longrightarrow & \text{Pic}(Y)[\ell^n] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle c_n} & & \downarrow{\scriptstyle D \mapsto [D]} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y)^*/(\mathscr{O}(Y)^*)^{\ell^n} & \longrightarrow & H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}/\ell^n(1)) & \longrightarrow & H^1(Y, \mathbf{G}_m)[\ell^n] & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et on conclut grâce au lemme des 5. □

Posons

$$A_{\ell,\infty}(Y) = \{(u_n, v_n)_{n \in \mathbf{N}},\ u_n \in A_{\ell,n}(Y),\ u_{n+1} = u_n v_n^{\ell^n},\ v_n \in C(Y)^*\}$$
$$A_{\ell,\infty}(Y)^{\text{triv}} = \{(f_n^{\ell^n}, f_{n+1}^{\ell}/f_n)_{n \in \mathbf{N}},\ f_n \in C(Y)^*\} \subset A_{\ell,\infty}(Y),$$

et définissons le groupe des symboles ℓ-adiques par

$$\text{Symb}_\ell(Y) = A_{\ell,\infty}(Y)/A_{\ell,\infty}(Y)^{\text{triv}}.$$

Remarquons que $\mathscr{O}(Y)^{**} \hookrightarrow \text{Symb}_\ell(Y)$ (par $u \mapsto (u_n, v_n)_n$, avec $u_n = u$ et $v_n = 1$ pour tout n).

Corollaire 5.5. — On a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Symb}_\ell(Y) \cong H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1)).$$

Démonstration. — Il suffit de prouver la bijectivité de l'application naturelle $\mathrm{Symb}_\ell(Y) \to \varprojlim_n A_{\ell,n}(Y)/(C(Y)^*)^{\ell^n}$. La surjectivité est évidente, et si $(u_n, v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A_{\ell,\infty}(Y)$ a une image nulle, on peut écrire $u_n = f_n^{\ell^n}$ avec $f_n \in C(Y)^*$, et donc $f_{n+1}^\ell/f_n = \zeta_n v_n$ avec $\zeta_n \in \mu_{\ell^n}$. Il existe $\eta_n \in \mu_{\ell^n}$ tels que $\eta_{n+1}^\ell \zeta_n = \eta_n$ pour tout n, et en posant $g_n = \eta_n f_n$, on a $u_n = g_n^{\ell^n}$ et $v_n = g_{n+1}^\ell/g_n$. □

5.1.4. Le cas des shorts. — Soit X une courbe propre et lisse sur $\mathscr{O}_C$, et soit $J := \mathrm{Pic}^0(X)$ la jacobienne de X. Alors J est un schéma abélien sur $\mathscr{O}_C$ et on dispose d'un morphisme de $\mathscr{O}_C$-schéma $X \times X \to J$ envoyant (P, Q) sur la classe du diviseur $Q - P$ (on note $(P, Q) \mapsto Q - P$ ce morphisme ainsi que les applications qui s'en déduisent sur les fibres génériques et spéciales).

L'injection naturelle $J(\mathscr{O}_C) \to J(C)$ est un isomorphisme, ce qui fournit une flèche de réduction $J(C) \to J(k_C)$ que l'on note $P \mapsto \bar{P}$ (on note de même la réduction $X(C) \to X(k_C)$) et dont on note $J(C)_0$ le noyau (c'est un sous-groupe de Lie de $J(C)$ car $\overline{Q - P} = \bar{Q} - \bar{P}$ et $J(C)_0$ est ouvert dans $J(C)$).

Lemme 5.6. — Si $P \in X(k_C)$, le sous-groupe de $J(C)$ engendré par les $Q_1 - Q_2$, pour $Q_1, Q_2 \in]P[$, est $J(C)_0$.

Démonstration. — Soit g le genre de X. Il n'y a rien à prouver si $g = 0$; on peut donc supposer $g \geq 1$. Si $Q_1, Q_2 \in]P[$, on a $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2 = P$ et donc $Q_1 - Q_2 \in J(C)_0$, ce qui prouve une des deux inclusions.

Pour prouver l'autre, fixons $\tilde{P} \in]P[$ et soit $d \geq 2g + 1$. Alors $\Sigma_d : X^d \to J$ définie par $\Sigma_d(Q_1, \ldots, Q_d) = \sum_{i=1}^d (Q_i - \tilde{P})$ fait de X^d/S_d une fibration en $\mathbf{P}^{d-g}$ au-dessus de J. Il existe un ouvert de Zariski U de J, contenant la section nulle $0 \in J(\mathscr{O}_C)$, tel que cette fibration soit triviale sur U, ce qui fournit une section $s : U \to X^d/S_d$ prenant la valeur $(\tilde{P}, \ldots, \tilde{P})$ en 0. Alors $U(\mathscr{O}_C)$ contient $J(C)_0$ et $s(J(C)_0)$ est contenue dans $]P[^d$, ce qui montre que tout élément de $J(C)_0$ est la somme d'au plus d éléments de la forme $Q - \tilde{P}$, avec $Q \in]P[$. D'où le résultat. □

Soit Y un $\mathscr{O}_C$-short obtenu en enlevant à X les tubes de points $Q_0, \ldots, Q_r \in X(k_C)$, deux à deux distincts, et soit Y^{gen} l'affinoïde qui est la fibre générique de Y. Les Q_i sont en bijection naturelle avec les éléments de $\partial^{\text{ad}} Y$.

Soit $H(k_C)$ le sous-groupe de $J(k_C)$ engendré par les $Q_i - Q_j$. Il résulte du lemme 5.6 et de la prop. 5.1 que :

Corollaire 5.7. — $\mathrm{Pic}(Y^{\text{gen}}) = J(k_C)/H(k_C)$.

Remarque 5.8. — En combinant le cor. 5.7 et le calcul standard du groupe de Picard de $X^{\mathrm{sp}} \setminus \{Q_0, ..., Q_r\}$ on en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}(Y^{\mathrm{gen}}) \cong \mathrm{Pic}(\bar{Y}),$$

où $\bar{Y} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}(Y)^+ \otimes_{\mathscr{O}_C} k_C)$ est la réduction canonique de Y. Ce résultat est un cas particulier d'un théorème de Gerritzen [26] et Heinrich-van der Put [31] dans le cas d'une valuation discrète.

Remarque 5.9. — (i) On a un isomorphisme [35]

$$\mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^*/C^*\mathscr{O}(Y)^{**} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(Y^{\mathrm{sp}})^*/k_C^*,$$

la flèche envoyant $u \in \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^*$ sur la réduction $\overline{u}$ de $p^{-r}u$, avec $r = v_Y(u)$.

(ii) On a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}(Y^{\mathrm{sp}})^*/k_C^* \to \mathrm{Ker}\big(\partial^* : \mathrm{Z}^{\partial^{\mathrm{ad}}Y} \to \mathrm{Z}\big) \to H(k_C) \to 0,$$

où $\partial^* : \mathrm{Z}^{\partial^{\mathrm{ad}}Y} \to \mathrm{Z}$ envoie $(n_i)_i$ sur $\sum_i n_i$, l'application de $\mathscr{O}(Y^{\mathrm{sp}})^*/k_C^*$ dans $\mathrm{Z}^{\partial^{\mathrm{ad}}}$ est $f \mapsto (v_{Q_i}(f))_i$, et celle de $\mathrm{Ker}\big(\partial^* : \mathrm{Z}^{\partial^{\mathrm{ad}}Y} \to \mathrm{Z}\big)$ dans $H(k_C)$ est $(n_i)_i \mapsto \sum_i n_i Q_i$.

On dispose d'une application résidu $\mathrm{Symb}_\ell(Y^{\mathrm{gen}}) \to \mathrm{Z}_\ell^{\partial^{\mathrm{ad}}Y}$ définie comme la composée de la restriction $\mathrm{Symb}_\ell(Y^{\mathrm{gen}}) \to \mathrm{Symb}_\ell(\partial^{\mathrm{ad}}Y)$ et de l'application résidu sur chacun des disque fantômes de $\partial^{\mathrm{ad}}Y$. En combinant avec l'isomorphisme du cor. 5.5, cela fournit une application résidu $H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{gen}}, \mathrm{Z}_\ell(1)) \to \mathrm{Z}_\ell^{\partial^{\mathrm{ad}}Y}$.

Proposition 5.10. — (i) Si $\ell \neq p$, l'application résidu induit une suite exacte

$$0 \to T_\ell J(k_C) \to H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{gen}}, \mathrm{Z}_\ell(1)) \to \mathrm{Ker}\big(\partial^* : \mathrm{Z}_\ell^{\partial^{\mathrm{ad}}Y} \to \mathrm{Z}_\ell\big) \to 0.$$

(ii) Si $\ell = p$, l'application résidu induit une suite exacte

$$0 \to T_p J(k_C) \to H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{gen}}, \mathrm{Z}_p(1))/(\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}) \to \mathrm{Ker}\big(\partial^* : \mathrm{Z}_p^{\partial^{\mathrm{ad}}Y} \to \mathrm{Z}_p\big) \to 0.$$

Démonstration. — On a une suite exacte (car la multiplication par ℓ^n est surjective sur $J(k_C)$)

$$0 \to T_\ell J(k_C) \to T_\ell(J(k_C)/H(k_C)) \to \mathrm{Z}_\ell \otimes H(k_C) \to 0$$

Le diagramme suivant est alors commutatif à lignes et colonnes exactes :

35. Notons que $\mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^{**} = \mathscr{O}(Y)^{**}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathrm{Ker} & \xrightarrow{\sim} & T_\ell J(k_C) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Z}_\ell \otimes \mathscr{O}(Y^{\mathrm{sp}})^* & \longrightarrow & \frac{H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{gen}}, \mathrm{Z}_\ell(1))}{\mathrm{Z}_\ell \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}} & \longrightarrow & T_\ell(J(k_C)/H(k_C)) & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Z}_\ell \otimes \mathscr{O}(Y^{\mathrm{sp}})^* & \to & \mathrm{Ker}\big(\partial^* : \mathrm{Z}_\ell^{\partial^{\mathrm{ad}} Y} \to \mathrm{Z}_\ell\big) & \longrightarrow & \mathrm{Z}_\ell \otimes H(k_C) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

• Pour prouver la commutativité, fixons $P_0 \in]Q_0[$ et notons $\iota : X \to J$ l'application $P \mapsto P - P_0$ (c'est la restriction à $\{P_0\} \times X$ de l'application considérée plus haut) que l'on étend par additivité à $\mathrm{Div}(X)$. On note $\bar{\iota} : \mathrm{Div}(X) \to J(k_C)$ la composée de ι et de la réduction.

On utilise la description de $H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{gen}}, \mathrm{Z}_\ell(1)$ en termes de symboles (cor. 5.5). Soit donc $(u_n, v_n)_n \in A_{\ell,\infty}(Y)$. La flèche de $H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{gen}}, \mathrm{Z}_\ell(1)) \to \mathrm{Z}_\ell \otimes H(k_C)$ passant par $T_\ell(J(k_C)/H(k_C))$ envoie $(u_n, v_n)_n$ sur $\lim_{n\to\infty} \bar{\iota}(\mathrm{Div}(u_n))$, où $\mathrm{Div}(u_n)$ est le diviseur de u_n sur Y ($\bar{\iota}(\mathrm{Div}(u_n))$ est aussi l'image $\iota(\mathrm{Div}(\overline{u}_n))$ dans $J(k_C)$ du diviseur de $\overline{u}_n$, vue comme fonction sur Y^{sp}). L'autre flèche envoie $(u_n, v_n)_n$ sur $-\lim_{n\to\infty} \sum_i v_{Q_i}(\overline{u}_n)\, \iota(Q_i)$. La différence entre les termes généraux des deux suites est $\iota(\mathrm{Div}(\overline{u}_n))$ où, cette fois-ci, $\overline{u}_n$ est vue comme une fonction sur X^{sp} ; cette différence est donc nulle dans $J(k_C)$ puisque c'est l'image d'un diviseur principal sur X^{sp}.

• La première ligne est obtenue en quotientant les deux premiers termes de la suite de Kummer par $\mathrm{Z}_\ell \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$ et en utilisant le (i) de la rem. 5.9.

• La seconde ligne est obtenue en tensorisant par Z_ℓ la suite du (ii) de la rem. 5.9.

• La seconde colonne verticale est la suite exacte ci-dessus.

Le résultat s'en déduit en utilisant le fait que $\mathrm{Z}_\ell \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} = 0$ si $\ell \neq p$. □

Remarque 5.11. — (i) $\mathscr{O}(Y)^{**}$ n'est pas p-adiquement complet et il s'injecte strictement dans $\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$.

(ii) Si $\ell \neq p$, alors $\mathrm{rg}_{\mathrm{Z}_\ell} T_\ell J(k_C) = 2g$, mais si $\ell = p$, alors $\mathrm{rg}_{\mathrm{Z}_p} T_p J(k_C)$ est égal à la dimension du sous-espace de pente 0 du module de Dieudonné de $J(k_C)$ et peut prendre les valeurs $0, 1, \ldots, g$.

5.2. Cohomologie syntomique

5.2.1. Lien avec le complexe de de Rham. — Soit Y un short sur $\mathscr{O}_C$, et soit $\breve{Y}$ un modèle sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$. On choisit un frobenius φ sur $\mathscr{O}(\breve{Y})$, et on note encore φ son extension à

$$\mathscr{O}(\widetilde{Y}) := \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \mathscr{O}(\breve{Y})$$

Les $H^i_{\text{syn}}(Y,1)$, sont les groupes de cohomologie du complexe

$$\text{Syn}(Y,1) := \ F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y}) \xrightarrow{d,1-\frac{\varphi}{p}} \Omega^1(\widetilde{Y}) \oplus \mathscr{O}(\widetilde{Y}) \xrightarrow{(1-\frac{\varphi}{p})-d} \Omega^1(\widetilde{Y}) \ ,$$

où $F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y}) = \text{Ker}(\mathscr{O}(\widetilde{Y}) \to \mathscr{O}(Y))$.

On note $C^\bullet_{\text{dR}}(\widetilde{Y})$ le complexe $\mathscr{O}(\widetilde{Y}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\widetilde{Y})$, et $H^i_{\text{dR}}(\widetilde{Y})$ ses groupes de cohomologie. Comme on ne peut pas diviser φ par p sur tout A_{cris}, on introduit $\mathscr{O}(\widetilde{Y})' = \mathscr{O}(\widetilde{Y}) + \big(1-\frac{\varphi}{p}\big)\mathscr{O}(\widetilde{Y})$ (alors $M := \mathscr{O}(\widetilde{Y})'/\mathscr{O}(\widetilde{Y})$ est tué par p), et $C^\bullet_{\text{dR}}(\widetilde{Y})' = \big(\ \mathscr{O}(\widetilde{Y})' \xrightarrow{d} \Omega^1(\widetilde{Y})\ \big)$. On a alors une suite exacte

$$0 \to \text{Syn}(Y,1) \to [\ C^\bullet_{\text{dR}}(\widetilde{Y}) \xrightarrow{1-\frac{\varphi}{p}} C^\bullet_{\text{dR}}(\widetilde{Y})'\ ] \to (\mathscr{O}(Y) \to M \to 0) \to 0.$$

En passant à la suite de cohomologie, et en utilisant le fait que $1-\frac{\varphi}{p}$ est une surjection de $H^0(C^\bullet_{\text{dR}}(\widetilde{Y})) = \text{A}_{\text{cris}}$ sur $H^0(C^\bullet_{\text{dR}}(\widetilde{Y})')$, cela fournit des suites exactes

$$0 \to \text{Z}_p t \to \text{A}_{\text{cris}}^{\varphi=p} \to \text{Ker}[\mathscr{O}(Y) \to M] \to H^1_{\text{syn}}(Y) \to H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y})^{\varphi=p} \to 0,$$

$$0 \to \text{Ker}[\mathscr{O}(Y)/\mathscr{O}_C \to M] \to H^1_{\text{syn}}(Y) \to H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y})^{\varphi=p} \to 0. \tag{5.12}$$

Remarquons que, M étant de p-torsion, $\text{Ker}[\mathscr{O}(Y)/\mathscr{O}_C \to M]$ est p-isomorphe à $\mathscr{O}(Y)/\mathscr{O}_C$.

5.2.2. Régulateur syntomique. — On rappelle que

$$A_{p,n}(Y^{\text{gen}}) = \{f \in C(Y^{\text{gen}})^*,\ \text{Div}(f) \in p^n\text{Div}(Y^{\text{gen}})\}.$$

Lemme 5.13. — Soit $u \in A_{p,n}(Y^{\text{gen}})$.

(i) Il existe $u_0 \in \breve{C}(\breve{Y})^*$, $v \in \mathscr{O}(Y)^*$, tels que $u = u_0 v a^{p^n}$, avec $a \in C(Y^{\text{gen}})^*$.

(ii) Il existe $u_1 \in \breve{C}(\breve{Y})^*$ tel que $u_0 = u_1 b^{p^n}$, avec $b \in \breve{C}(\breve{Y})^*$, et tel que les diviseurs de u_0 et u_1 sur la fibre spéciale soient étrangers.

Démonstration. — On fixe une compactification $\breve{X}$ de $\breve{Y}$, et on note J la jacobienne de $\breve{X}$. On note $P_0, \dots, P_r$ les éléments de $\breve{X}(k_C) \setminus \breve{Y}(k_C)$ et on fixe un relèvement $\breve{P}_i \in \breve{X}(\breve{C})$ de P_i. On envoie $\breve{X}$ dans J par $P \mapsto (P - \breve{P}_0)$. Le cor. 5.7 montre que $\text{Pic}(Y^{\text{gen}})$ est le quotient de $J(k_C)$ par le sous-groupe engendré par $P_1, \dots, P_r$.

Soit $u \in A_{p,n}(Y^{\text{gen}})$; écrivons $\text{Div}(u)$ sous la forme $p^n D$, avec $D \in \text{Div}(Y^{\text{gen}})$. Soit $\overline{D} \in \text{Div}(\breve{Y}(k_C))$ l'image de D, et soit $\overline{D}_0 \in \text{Div}(\breve{Y}(k_C))$ ayant même image que D dans $J(k_C)$ (on peut choisir $\overline{D}_0$ étranger à tout ensemble fini S donné; en particulier, on peut trouver deux tels choix étrangers l'un à l'autre). Choisissons un relèvement $\breve{D}_0$ de $\overline{D}_0$ dans $\text{Div}(\breve{Y}(\breve{C}))$. Par construction $D - \breve{D}_0$ a pour image 0 dans $J(k_C)$ et (lemme 5.6) on peut trouver $Q_1, \dots, Q_d \in]P_0[$ tels que $D - \breve{D}_0 - \sum_{i=1}^d (Q_i - \breve{P}_0) = 0$ dans $J(C)$. Il existe donc $N \in \text{Z}$ tel que $D - \breve{D}_0 - \sum_{i=1}^d Q_i - N\breve{P}_0 = \text{Div}(a)$, avec $a \in C(Y^{\text{gen}})^*$. Alors ua^{-p^n} a comme diviseur $p^n\breve{D}_0$ sur Y. Il s'ensuit que $p^n D_0 = n_1 P_1 + \cdots + n_r P_r$ dans $J(k_C)$, et il existe $R_1, \dots, R_d \in]P_0[(\breve{C})$ tels que

$$p^n D_0 - (n_1\breve{P}_1 + \cdots + n_r\breve{P}_r) - (R_1 + \cdots + R_d) + N\breve{P}_0 = \text{Div}(u_0),$$

avec $u_0 \in \breve{C}(\breve{X})^*$. Mais alors $v := ua^{-p^n}u_0^{-1} \in \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^*$ et, quitte à multiplier a par $\alpha \in C^*$, on peut s'arranger pour que $v \in \mathscr{O}(Y)^*$.

Ceci démontre le (i). Pour prouver le (ii), on part de $\overline{D}_1$ étranger à $\overline{D}_0$, ayant même image que $\overline{D}_0$ dans $J(k_C)$, et on relève $\overline{D}_1$ en $\breve{D}_1$ dans $\mathrm{Div}(\breve{Y})$. Il existe alors $Q_1, \dots, Q_d \in]P_0[(\breve{C})$ et $N \in \mathbf{Z}$, tels que $\breve{D}_0 - \breve{D}_1 - (Q_1 + \cdots + Q_d) + N\breve{P}_0 = \mathrm{Div}(b)$, avec $b \in C(Y^{\mathrm{gen}})^*$. Mais alors $u_1 = u_0 b^{-p^n}$ a pour diviseur $p^n\breve{D}_1$ sur Y. Ceci permet de conclure. □

On rappelle que

$$\mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}}) = \{u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}, u_n \in A_{p,n}(Y^{\mathrm{gen}}),\ u_{n+1}/u_n = v_n^{p^n}\}/\{(a_n^{p^n})_{n\in\mathbf{N}}\}.$$

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}})$. On écrit u_n sous la forme $u_{n,0}a_n^{p^n}v_n$ comme ci-dessus, et on choisit des relèvements $\tilde{v}_n \in \mathscr{O}(\widetilde{Y})$ de v_n et $\tilde{a}_n \in \mathrm{Fr}(\mathscr{O}(\widetilde{Y}))$ de a_n, et on pose $\tilde{u}_n = u_{n,0}\tilde{a}_n^{p^n}\tilde{v}_n$. On pose $\delta_n(u_n) = \big(\frac{d\tilde{u}_n}{\tilde{u}_n}, \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n^p}\big)$ modulo p^n.

Lemme 5.14. — (i) $\delta_n(u_n)$ est un 1-cocycle de $\mathrm{Syn}(Y,1)$ modulo p^n.

(ii) Les $\delta_n(u_n)$ convergent vers un 1-cocycle $\delta_Y(u)$ de $\mathrm{Syn}(Y,1)$ dont la classe dans $H^1_{\mathrm{syn}}(Y,1)$ ne dépend que de u.

Démonstration. — Soient $x_n = \frac{d\tilde{u}_n}{\tilde{u}_n}$ et $y_n = \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n^p}$ de telle sorte que $\delta_n(u_n) = (x_n, y_n)$ modulo p^n. On a $(1 - \frac{\varphi}{p})x_n = dy_n$, et donc cette relation est a fortiori vérifiée modulo p^n.

De plus, si on prend deux écritures $u_n = u_{n,0}a_n^{p^n}v_n = u_{n,1}(a_nb_n)^{p^n}v_n$, avec $u_{n,0}$ et $u_{n,1}$ de diviseurs étrangers, on a $x_n = \frac{du_{n,0}}{u_{n,0}} + \frac{d\tilde{v}_n}{v_n} = \frac{du_{n,1}}{u_{n,1}} + \frac{d\tilde{v}_n}{v_n}$ modulo p^n, et comme les diviseurs de $u_{n,0}$ et $u_{n,1}$ sont étrangers, cela montre que x_n est holomorphe (i.e. $x_n \in \Omega^1(\widetilde{Y})$ modulo p^n). Le même argument montre que $y_n \in \mathscr{O}(\widetilde{Y})$ modulo p^n, ce qui prouve le (i).

La convergence de la suite de terme général $\delta_n(u_n)$ vient de ce que $\delta_{n+1}(u_{n+1}) = \delta_n(u_n)$ modulo p^n car u_{n+1}/u_n est une puissance p^n-ième. Si on note $\delta(u) = (x,y)$ la limite, alors $(1-\frac{\varphi}{p})x = dy$ par passage à la limite, et donc $\delta(u)$ est un 1-cocycle de $\mathrm{Syn}(Y,1)$. Ce 1-cocycle est uniquement déterminé au choix près des $\tilde{v}_n$, et donc est bien déterminé à addition près du cobord limite des $\log(\tilde{v}_n/\tilde{v}'_n)$ si $\tilde{v}_n$ et $\tilde{v}'_n$ sont deux relèvements de v_n. La classe de $\delta(u)$ dans $H^1_{\mathrm{syn}}(Y,1)$ ne dépend donc que de u, ce qui prouve le (ii). □

Le régulateur syntomique est l'application

$$\delta_Y : \mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}}) \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y,1)$$

dont l'existence découle du lemme 5.14. On peut composer δ_Y avec la flèche $H^1_{\mathrm{syn}}(Y,1) \to H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\varphi=p}$ de (5.12).

Lemme 5.15. — Si $u \in \mathscr{O}(Y)^{**}$ l'image de $\delta_Y(u)$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\varphi=p}$ est de torsion.

Démonstration. — Si $\tilde{u} \in \mathscr{O}(\widetilde{Y})^{**}$ vérifie $\theta(\tilde{u}) = u$, alors $\log\tilde{u}$ converge dans $\mathscr{O}(\widetilde{Y})[\frac{1}{p}]$ et $\delta_Y(u)$ est le bord de $\log\tilde{u}$ et donc est tué par p^N si $p^N\log\tilde{u} \in \mathscr{O}(\widetilde{Y})$. □

5.3. Symboles et formes différentielles. — Soient $\breve{Y}$ un short sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$, $Y = \breve{Y} \otimes_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \mathscr{O}_C$ et Y^{gen} la fibre générique de Y. Soit $\bar{Y} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_C} k_C)$ la fibre spéciale (classique) de Y, un k_C-schéma lisse irréductible s'identifiant à la fibre spéciale de $\breve{Y}$. On note $\Omega^1_{\breve{Y}} = \Omega^1_{\breve{Y}/W(k_C)}$ et $\Omega^1_{\bar{Y}} = \Omega^1_{\bar{Y}/k_C}$ les faisceaux des différentielles de $\breve{Y}$ et $\bar{Y}$ (sur $\bar{Y}_{\text{et}}$).

5.3.1. Formes différentielles et opérateur de Cartier. — On choisit un relèvement $\varphi : \breve{Y} \to \breve{Y}$ du frobenius absolu de $\bar{Y}$. Il induit, par fonctorialité, un morphisme $\varphi : \Omega^1_{\breve{Y}} \to \Omega^1_{\breve{Y}}$, dont l'image est contenue dans $p\Omega^1_{\breve{Y}}$. Comme $\Omega^1_{\breve{Y}}$ est sans p-torsion, cela permet de définir un endomorphisme $F = \varphi/p : \Omega^1_{\breve{Y}} \to \Omega^1_{\breve{Y}}$ et un calcul immédiat montre que la composée de la réduction $\bar{F} : \Omega^1_{\bar{Y}} \to \Omega^1_{\bar{Y}}$ modulo p de F et de la projection naturelle $\Omega^1_{\bar{Y}} \to \Omega^1_{\bar{Y}}/d\mathscr{O}_{\bar{Y}}$ est l'opérateur de Cartier $C^{-1} : \Omega^1_{\bar{Y}} \to \Omega^1_{\bar{Y}}/d\mathscr{O}_{\bar{Y}}$, qui est un isomorphisme puisque $\bar{Y}$ est lisse. On note $C : \Omega^1_{\bar{Y}}/d\mathscr{O}_{\bar{Y}} \to \Omega^1_{\bar{Y}}$ l'inverse de C^{-1}, c'est donc un endomorphisme de $\Omega^1_{\bar{Y}}$ nul sur $d\mathscr{O}_{\bar{Y}}$.

Considérons la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de sous-faisceaux de $\Omega^1_{\bar{Y}}$ définie par $B_1 = d\mathscr{O}_{\bar{Y}}$ et $B_{n+1} = B_n + \bar{F}^n(B_1)$ et sa limite $B_\infty = \cup_n B_n = \sum_{n\geq 0} \bar{F}^n(B_1)$. Le lemme ci-dessous est la combinaison d'un cas particulier d'un résultat de Raynaud et de la théorie classique de l'opérateur de Cartier ; c'est la clé des résultats de ce paragraphe.

Lemme 5.16. — On a une décomposition en somme directe de faisceaux

$$\Omega^1_{\bar{Y}} = B_\infty \oplus \big(k_C \otimes_{\mathbb{F}_p} (\Omega^1_{\bar{Y}})^{C=1}\big),$$

ainsi qu'un isomorphisme de faisceaux

$$d\log : \mathscr{O}^*_{\bar{Y}}/(\mathscr{O}^*_{\bar{Y}})^p \cong (\Omega^1_{\bar{Y}})^{C=1}.$$

Démonstration. — Par définition (et la discussion ci-dessus) B_∞ est le sous-faisceau de C-torsion de $\Omega^1_{\bar{Y}}$. Le premier point découle alors du fait que toute forme différentielle $\omega \in \Omega^1_{\bar{Y}}(U)$ (U étant un ouvert de $\bar{Y}$) est C-finie [36], donc l'espace engendré par les $C^n\omega$ se décompose en une partie de C-torsion et une partie sur laquelle C est inversible, et cette dernière partie est engendrée par les points fixes sous C (car k_C est algébriquement clos). Voir [32, § 2.5] pour plus de détails. Le second point est un théorème classique de Cartier (cf. [32, th. 2.1.17]). □

Notons simplement $H^1_{\breve{Y}}$ le faisceau $\Omega^1_{\breve{Y}}/d\mathscr{O}_{\breve{Y}}$ et $H^1_{\breve{Y}}[p^\infty]$ son sous-faisceau de p-torsion.

Lemme 5.17. — La composée $H^1_{\breve{Y}} = \Omega^1_{\breve{Y}}/d\mathscr{O}_{\breve{Y}} \to \Omega^1_{\bar{Y}}/d\mathscr{O}_{\bar{Y}} = \Omega^1_{\bar{Y}}/B_1$ induit un isomorphisme de faisceaux

$$H^1_{\breve{Y}}[p^\infty]/pH^1_{\breve{Y}}[p^\infty] \cong B_\infty/B_1.$$

Démonstration. — Montrons d'abord qu'une section locale $f \in \mathscr{O}_{\breve{Y}}$ vérifie $df \in p^n\Omega^1_{\breve{Y}}$ si et seulement si l'on peut écrire (localement) $f = \sum_{k=0}^n p^k F^{n-k}(g_k)$ avec $g_k \in \mathscr{O}_{\breve{Y}}$. C'est un cas particulier de [32, prop. 2.3.13], mais la preuve étant facile, nous allons la donner pour le

36. i.e. l'espace engendré par les $C^n\omega$ pour $n \geq 0$ est de dimension finie sur k_C. Le point clé est que C diminue l'ordre des pôles des formes différentielles.

confort du lecteur. Un sens est évident, puisque $d\circ F = p\,F\circ d$. Pour l'autre sens, on raisonne par récurrence. Supposons donc que l'on dispose d'une écriture $f=\sum_{k=0}^{n-1} p^k F^{n-1-k}(g_k)$. Puisque $d\circ F = p\,F\circ d$ et $\Omega^1_{\breve{Y}}$ est sans p-torsion, la divisibilité de df par p^n se traduit par $\sum_{k=0}^{n-1}\bar{F}^{n-1-k}(d\bar{g}_k)=0$ dans $\Omega^1_{\bar{Y}}$. En utilisant la compatibilité entre $\bar{F}$ et C^{-1}, on voit que cette relation force $d\bar{g}_k = 0$ pour tout k, donc (encore par la théorie de Cartier) on peut écrire $g_k = F(a_k)+db_k+pc_k$. En insérant ces relations dans l'écriture de f, on obtient une représentation $f=\sum_{k=0}^{n} p^k F^{n-k}(h_k)$, ce qui permet de conclure.

Revenons à la preuve du lemme. Si la classe de $\omega\in\Omega^1_{\breve{Y}}$ dans $H^1_{\breve{Y}}$ est tuée par p^n, alors $p^n\omega = df$ pour un $f\in\mathscr{O}_{\breve{Y}}$. En écrivant (localement) $f=\sum_{k=0}^{n} p^k F^{n-k}(g_k)$, on voit comme ci-dessus que $\omega=\sum_{k=0}^{n} F^{n-k}(dg_k)$ et donc $\overline{\omega}=\sum_{k=0}^{n}\bar{F}^{n-k}(d\bar{g}_k)\in B_\infty$, ce qui montre que la réduction mod p induit bien un morphisme $H^1_{\bar{Y}}[p^\infty]/pH^1_{\bar{Y}}[p^\infty]\to B_\infty/B_1$. Son injectivité étant immédiate, montrons la surjectivité. Soit $x\in B_\infty$, alors il existe n et $f_i\in\Omega_{\bar{Y}}$ tels que $x=\sum_{k=0}^{n}\bar{F}^{n-k}(df_k)$. On relève f_k en $\hat{f}_k\in\Omega_{\breve{Y}}$. Le même calcul que ci-dessus montre que la classe de $\omega:=\sum_{k=0}^{n} p^k F^{n-k}(d\hat{f}_k)$ dans $H^1_{\bar{Y}}$ est de torsion et se réduit sur la classe de x. □

5.3.2. Le séparé de la cohomologie de de Rham. — On définit les $H^i_{\mathrm{dR}}(Y)$ comme les groupes de cohomologie du complexe $\mathscr{O}(Y)\xrightarrow{d}\Omega^1(Y)$ munis de la topologie quotient. On note $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{tors}}$ l'adhérence, dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$, du sous-groupe de torsion (en particulier $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{tors}}$ contient l'adhérence de 0 qui est loin d'être nulle). On note $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}}$ le quotient $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)/H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{tors}}$. On vérifie sans mal que $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}}$ est sans torsion et complet pour la topologie p-adique.

Proposition 5.18. — On a un isomorphisme naturel

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}/pH^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}\cong k_C\otimes_{\mathbf{F}_p}\Omega^1(\bar{Y})^{C=1}$$

et une suite exacte

$$0\to\mathscr{O}(\bar{Y})^*/(\mathscr{O}(\bar{Y})^*)^p\to H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}/pH^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}\to k_C\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Pic}(\bar{Y})[p]\to 0.$$

Démonstration. — Soient $M=H^0(\breve{Y},H^1_{\breve{Y}})=\Omega^1(\breve{Y})/d\mathscr{O}(\breve{Y})$ (l'égalité découle du caractère affine de $\bar{Y}$) et $\mathscr{F}=H^1_{\bar{Y}}[p^\infty]$. Puisque $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}$ est le quotient de M par l'adhérence de $M[p^\infty]=H^0(\breve{Y},\mathscr{F})$, on a une suite exacte

$$M[p^\infty]/p\to M/p\to H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}/p\to 0.$$

D'autre part comme $\breve{Y}$ est affine et $\mathscr{F}/p\mathscr{F}$ est limite inductive de faisceaux cohérents (lemme 5.17), on a $H^1(\breve{Y},\mathscr{F}/p\mathscr{F})=0$ et par dévissage $H^1(\breve{Y},\mathscr{F})=0$, donc $M[p^\infty]/p\cong H^0(\breve{Y},\mathscr{F})/p\cong H^0(\breve{Y},\mathscr{F}/p\mathscr{F})\cong H^0(\bar{Y},B_\infty/B_1)$, le dernier isomorphisme étant une conséquence du lemme 5.17. On obtient donc une suite exacte

$$H^0(\bar{Y},B_\infty/B_1)\to\Omega^1(\bar{Y})/d\mathscr{O}(\bar{Y})\to H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}/p\to 0.$$

Puisque $\breve{Y}$ est affine, on obtient $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}/p\cong H^0(\bar{Y},\Omega^1_{\bar{Y}}/B_\infty)$, qui s'identifie (par le lemme 5.16) à $H^0(\bar{Y},k_C\otimes_{\mathbf{F}_p}(\Omega^1_{\bar{Y}})^{C=1})=k_C\otimes_{\mathbf{F}_p}\Omega^1(\bar{Y})^{C=1}$. Cela montre le premier point.

Le second s'en déduit, en utilisant encore une fois le lemme 5.16 et la suite exacte évidente

$$0 \to \mathscr{O}(\bar{Y})^*/(\mathscr{O}(\bar{Y})^*)^p \to H^0(\bar{Y}, \mathscr{O}_{\bar{Y}}^*/(\mathscr{O}_{\bar{Y}}^*)^p) \to \mathrm{Pic}(\bar{Y})[p] \to 0. \quad \square$$

Corollaire 5.19. — (i) On a un isomorphisme naturel

$$(H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}/p \cong \Omega^1(\bar{Y})^{C=1}$$

et une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}(\bar{Y})^*/(\mathscr{O}(\bar{Y})^*)^p \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}/p \to \mathrm{Pic}(\bar{Y})[p] \to 0.$$

(ii) La flèche naturelle $(H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} \to (\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{W(k_C)} H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$ est un isomorphisme de Z_p-modules libres de rang fini.

Démonstration. — On déduit directement de la proposition ci-dessus et du fait que $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}$ est sans p-torsion et complet pour la topologie p-adique que $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}$ est un $W(k_C)$-module libre de type fini. Puisque $d \circ F = p\,F \circ d$, F induit un endomorphisme de $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}) = \Omega^1(\breve{Y})/d\mathscr{O}(\breve{Y})$, qui induit à son tour un endomorphisme semi-linéaire F de $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}$. L'isomorphisme $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}/p \cong k_C \otimes_{\mathrm{F}_p} \Omega^1(\bar{Y})^{C=1}$ fourni par la proposition ci-dessus est compatible avec l'action de F sur $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}$ et le frobenius de k_C. On en déduit que $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}/p$ possède une base de points fixes sous $\bar{F}$, qui y est donc bijectif. Autrement dit, F est un automorphisme semi-linéaire du $W(k_C)$-module libre de type fini $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}$ et $F-1$ est surjectif, et donc (puisque k_C est algébriquement clos) la flèche naturelle

$$W(k_C) \otimes_{\mathrm{Z}_p} (H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{F=1} \to H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}}$$

est un isomorphisme. Puisque $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} = \mathrm{Z}_p$ et $\varphi = pF$, cela montre que la flèche naturelle $(H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} \to (\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{W(k_C)} H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$ est un isomorphisme. $\square$

Si M est un $\mathscr{O}_{\breve{C}}$-module libre de rang fini, muni d'un frobenius φ, le théorème de Dieudonné-Manin fournit une décomposition $M[\frac{1}{p}] = \oplus_{r \in \mathrm{Q}_+} M[\frac{1}{p}]^{[r]}$ par les pentes de φ. On définit $M^{[r]}$ comme $M \cap M[\frac{1}{p}]^{[r]}$.

On suppose que $\breve{Y}$ est obtenu en retirant à une courbe propre $\breve{X}$ les tubes $]Q_0[, \dots,]Q_r[$ de points $Q_0, \dots, Q_r$ de la fibre spéciale.

Proposition 5.20. — L'application résidu induit une suite exacte de φ-modules

$$0 \to H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{X})^{[1]} \to H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}} \to \mathrm{Ker}\big(\partial^* : \mathscr{O}_{\breve{C}}^{\partial^{\mathrm{ad}} Y} \to \mathscr{O}_{\breve{C}}\big)(-1) \to 0.$$

Démonstration. — Comme la pente de φ sur $H^2_{\mathrm{dR}}(\breve{X})$ est 1, et que φ est divisible par p sur $\Omega^1(\breve{X})$, on a $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{X})^{[1]} \perp \Omega^1(\breve{X})$, et comme $\Omega^1(\breve{X})$ est maximalement isotrope pour le cup-produit on en déduit que $H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{X})^{[1]} \subset \Omega^1(\breve{X})$.

Compte-tenu de ce qui précède, de la prop. 5.18, et de ce que tout est complet pour la topologie p-adique et sans torsion, on est ramené à prouver l'exactitude de la suite

$$0 \to k_C \otimes_{\mathrm{F}_p} \Omega^1(\bar{X})^{C=1} \to k_C \otimes_{\mathrm{F}_p} \Omega^1(\bar{Y})^{C=1} \to \mathrm{Ker}\big(\partial^* : k_C^{\partial^{\mathrm{ad}} Y} \to k_C\big) \to 0$$

Maintenant, on a $\Omega^1(\bar{Y})^{C=1} = \Omega^1(\bar{Y}^\times)^{C=1}$, où $\Omega^1(\bar{Y}^\times)$ désigne les formes différentielles ayant des pôles simples en les points de $\bar{X} \setminus \bar{Y}$. Donc (en utilisant, comme précédemment, que C est semi-linéaire et k_C algébriquement clos) on se ramène à prouver l'exactitude de la suite

$$0 \to \Omega^1(\bar{X}) \to \Omega^1(\bar{Y}^\times) \to \mathrm{Ker}\big(\partial^* : k_C^{\partial^{\mathrm{ad}} Y} \to k_C\big) \to 0$$

Celle-ci découle de ce que $H^1(\bar{X}, \Omega^1_{\bar{X}}) \cong k_C$ (si $\bar{X} = U \cup V$ et $\omega \in \Omega^1(U \cap V)$ l'image de ω dans k_C est $\sum_{x \in V} \mathrm{Res}_x \omega = -\sum_{x \in U} \mathrm{Res}_x \omega$). □

5.3.3. Dévissage de la cohomologie étale. — Rappelons que l'on dispose d'un régulateur $\delta_Y : \mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}}) \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y, 1)$ ainsi que d'une projection $H^1_{\mathrm{syn}}(Y, 1) \to (\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{W(k_C)} H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} \cong (H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$. On en déduit une application

$$R : \mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}}) \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}.$$

Concrètement, en suivant les diverses identifications et en utilisant les notations des paragraphes précédents, on a (où $\theta_0 : \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathscr{O}_{\breve{C}}$ est le morphisme usuel) :

$$R((u_n)_n) = \lim_{n \to \infty} \tfrac{d\theta_0(\tilde{u}_n)}{\theta_0(\tilde{u}_n)}.$$

L'application R s'annule sur $\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$ (lemme 5.15). Elle induit donc une application

$$R : \frac{\mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}})}{\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}} \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$$

Proposition 5.21. — L'application

$$R : \frac{\mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}})}{\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}} \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$$

ci-dessus est un isomorphisme.

Démonstration. — Les deux termes sont des Z_p-modules libres de type fini : il suffit d'invoquer la prop. 5.10 pour le premier et la discussion ci-dessus pour le second. Il suffit donc de montrer que la réduction modulo p de R est un isomorphisme. En identifiant $\mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}})$ et $H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{gen}}, \mathrm{Z}_p(1))$, et en utilisant la prop. 5.10 et la rem. 5.9, ainsi que l'isomorphisme $\mathrm{Pic}(Y^{\mathrm{gen}}) \cong \mathrm{Pic}(\bar{Y})$ (rem. 5.8) on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}(\bar{Y})^* / (\mathscr{O}(\bar{Y})^*)^p \to \Big(\frac{\mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}})}{\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}}\Big)/p \to \mathrm{Pic}(\bar{Y})[p] \to 0.$$

D'autre part, le cor. 5.19 exhibe une suite exacte analogue, avec $(H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}/p$ à la place de $\big(\frac{\mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}})}{\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}}\big)/p$. Il suffit de montrer que l'application R est compatible, modulo p, avec ces deux suites exactes (les applications induites sur les termes extrêmes étant l'identité). En suivant les diverses identifications et les définitions, on se ramène à démontrer l'énoncé suivant : si $u_1 \in C(Y^{\mathrm{gen}})^*$ et $a \in \breve{C}(\breve{Y})^*$ sont tels que $p \mid \mathrm{Div}(u_1)$ et $u_1/a \in \mathscr{O}(Y^{\mathrm{gen}})^{**}$, alors $\frac{d\theta_0(\tilde{u}_1)}{\theta_0(\tilde{u}_1)} \equiv \frac{da}{a} \pmod{p}$. Or ceci est évident car $\theta_0(\tilde{u}_1/a) \equiv 1 \bmod p$. □

Corollaire 5.22. — On dispose d'une suite exacte naturelle :

$$0 \to \mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\text{et}}(Y^{\text{gen}}, \mathbf{Z}_p(1)) \to (\mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes H^1_{\text{dR}}(\breve{Y})^{\text{sep}})^{\varphi=p} \to 0$$

et $(\mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes H^1_{\text{dR}}(\breve{Y})^{\text{sep}})^{\varphi=p}$ est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de type fini.

Remarque 5.23. — Soit $H^1_{\text{dR}}(\breve{Y})^{\text{sep}}_0 \subset H^1_{\text{dR}}(\breve{Y})^{\text{sep}}$ le noyau de l'application résidu. Il résulte de la prop. 5.21, du (ii) de la prop. 5.10 et de la prop. 5.20 que l'on a un isomorphisme

$$(\mathbf{B}^+_{\text{cris}} \otimes H^1_{\text{dR}}(\breve{X})^{[1]}) \cong V_p J(k_C).$$

Si on remplace le sous-espace $H^1_{\text{dR}}(\breve{X})^{[1]}$ par l'espace tout entier, on obtient (en spécialisant le th. 0.17 au cas de bonne réduction) :

$$(\mathbf{B}^+_{\text{cris}} \otimes H^1_{\text{dR}}(\breve{X}))^{\varphi=p} \cong V_p J(\mathscr{O}_C/p).$$

5.4. Comparaison syntomique-étale pour les petits shorts

On dit qu'un $\mathscr{O}_{\breve{C}}$-short Y est petit si $\mathscr{O}(Y)$ est étale au-dessus de $\mathscr{O}_{\breve{C}}\langle T\rangle$ (i.e. si Y est étale au-dessus d'une boule fermée).

5.4.1. L'opérateur ψ. — Soit Y un petit short sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$. Par définition, $\mathscr{O}(Y)$ est étale au-dessus de $\mathscr{O}_{\breve{C}}\langle T\rangle$, et on munit de $\mathscr{O}(Y)$ du frobenius φ vérifiant $\varphi(T) = T^p$.

Maintenant, dT est une base de $\Omega^1(Y)$, et donc T est une p-base de $\mathscr{O}(Y)$ sur $\varphi(\mathscr{O}(Y))$: tout élément x de $\mathscr{O}(Y)$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(x_i)T^i$. On définit $\psi : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(Y)$ par

$$\psi\big(\sum\nolimits_{i=0}^{p-1} \varphi(x_i)T^i\big) := x_0$$

L'opérateur ψ est un inverse à gauche de φ : on a $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. On définit ψ sur $\Omega^1(Y)$ par la formule

$$\psi(f\,\tfrac{dT}{T}) = \psi(f)\,\tfrac{dT}{T}$$

On a $\psi \circ \varphi = p$ sur $\Omega^1(Y)$ et $\psi \circ d = p\,d \circ \psi$.

Lemme 5.24. — d induit un isomorphisme $d : \mathscr{O}(Y)^{\psi=0} \xrightarrow{\sim} \Omega^1(Y)^{\psi=0}$.

Démonstration. — Il suffit de prouver le résultat modulo p. Un élément de $(\mathscr{O}(Y)/p)^{\psi=0}$ (resp. $(\Omega^1(Y)/p)^{\psi=0}$) s'écrit, de manière unique, sous la forme $x = \sum_{i=1}^{p-1} \varphi(x_i)\,T^i$ (resp. $\omega = \sum_{i=1}^{p-1} \varphi(x_i)\,T^i\,\frac{dT}{T}$, et on a $dx = \big(\sum_{i=1}^{p-1} i\varphi(x_i)T^i\big)\frac{dT}{T}$. On en déduit le résultat. □

5.4.2. Structure des $\mathscr{O}(Y)$-modules munis d'un ψ

Lemme 5.25. — Soit M un $\mathscr{O}(Y)$-module de type fini, muni d'un opérateur ψ vérifiant $\psi(\varphi(a)x) = a\psi(x)$ pour tous $a \in \mathscr{O}(Y)$ et $x \in M$. Il existe un unique sous-module $M^\sharp$ de M, de rang fini sur $W(k_C)$, stable par ψ et sur lequel ψ est bijectif. De plus, si $x \in M$ et $k \geq 1$, alors $\psi^n(x) \in M^\sharp + p^k M$, pour tout $n \geq n(x,k)$.

Démonstration. — Commençons par prouver le même résultat modulo p. Choisissons une famille génératrice $m_1, \dots, m_s$ de M sur $\mathscr{O}(Y)$ et écrivons $\mathscr{O}(Y)$ comme un quotient de $\mathscr{O}_{\check{C}}\langle X_1, \dots, X_r\rangle$. Définissons le degré de $x \in \mathscr{O}(Y)/p$ comme le minimum des degrés des éléments de $k_C[X_1, \dots, X_r]$ ayant pour image x, et le degré $\deg x$ de $x \in M/p$ comme le minimum sur toutes les écritures possibles $x = \sum_i x_i m_i$ du maximum des degrés des x_i.

Soit $x \in M/p$ et soit $\sum_{i,j} a_i X^i m_j$ une écriture de x de degré $\deg x$. En écrivant i sous la forme $i_0 + pi'$, avec $i_0 \in \{0, \dots, p-1\}^{[1,r]}$, cela permet d'ecrire x sous la forme

$$x = \sum_{i_0, j} X^{i_0} x_{i_0,j}^p m_j,$$

avec $x_{i_0,j} \in \mathscr{O}(Y)/p$ de degré $\leq \frac{1}{p} \deg x$. Alors

$$\psi(x) = \sum_{i_0} \psi(X^{i_0} m_j) x_{i_0,j}.$$

Soit N le maximum des degrés des $\psi(X^{i_0} m_j)$. La formule ci-dessus fournit la majoration $\deg(\psi(x)) \leq N + \frac{1}{p}\deg(x)$. On en déduit que $\deg(\psi^n(x)) \leq \frac{pN}{p-1}$, si n est assez grand. L'ensemble M_N des $x \in M/p$ tels que $\deg x \leq \frac{pN}{p-1}$ est un k_C-espace de dimension finie, qui est stable par ψ d'après ce qui précède. On note $\overline{M}^\sharp$ l'intersection des $\psi^n(M_N)$, pour $n \geq 1$ (cette intersection se stabilise pour un $n \leq \dim_{k_C} M_N$, i.e. il existe n_0 tel que $\overline{M}^\sharp = \psi^{n_0}(M_N)$). Alors $\overline{M}^\sharp$ est un k_C-espace de dimension finie, stable par ψ, sur lequel ψ est surjectif et donc bijectif, et c'est l'unique k_C-espace de dimension finie avec ces propriétés. De plus, si $x \in M$, il existe $n(x) \in \mathbf{N}$ tel que $\psi^n(x) \in \overline{M}^\sharp$, pour tout $n \geq n(x)$.

Notons que ψ est φ^{-1}-semi-linéaire. Il existe donc, d'après le théorème de Dieudonné-Manin, une base $(e_1, \dots, e_t)$ de $\overline{M}^\sharp$ vérifiant $\psi(e_i) = e_i$ pour tout i.

Prouvons maintenant, par récurrence sur k, l'existence et l'unicité de $M_k^\sharp \subset M_k = M/p^k$ satisfaisant les exigences du lemme (d'après ce qui précède $M_1^\sharp = \overline{M}^\sharp$), et la surjectivité de $M_k^\sharp \to M_1^\sharp$. Commençons par prouver qu'il existe $e_{i,k+1} \in M_{k+1}$ ayant pour image $e_{i,k}$ dans M_k, et vérifiant $\psi(e_{i,k+1}) = e_{i,k+1}$. Pour cela, choisissons un relèvement arbitraire x de $e_{i,k}$ dans M_{k+1}. Alors $\psi(x) - x \in p^k M_{k+1} \cong M_1$. Il existe donc n_0 tel que $\psi^n(\psi(x) - x) \in p^k M_1^\sharp$ et, quitte à remplacer x par $\psi^{n_0}(x)$, on peut supposer que $\psi(x) - x \in p^k M_1^\sharp$. Maintenant, $\psi - 1$ est surjectif sur $p^k M_1^\sharp$ (car ψ est φ^{-1}-semi-linéaire); il existe donc $y \in p^k M_1^\sharp$ tel que $\psi(y) - y = \psi(x) - x$, et on peut prendre $e_{i,k+1} = x - y$.

Soit $x \in M_{k+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe n_0 tel que l'image de $\psi^{n_0}(x)$ dans M_k appartienne à $M_k^\sharp$. On peut donc écrire $\psi^{n_0}(x) = \sum_i a_i e_{i,k+1} + py$, avec $y \in p^k M_{k+1} (\cong M_1)$. Il existe n_1 tel que $\psi^{n_1}(y) \in p^k M_1^\sharp$ et donc $\psi^{n_1}(y) = \sum_i p^k b_i e_{i,k+1}$. Il s'ensuit que $\psi^{n_0+n_1}(x) = \sum_i (a_i^{p^{-n_1}} + p^k b_i) e_{i,k+1}$, et donc que $M_{k+1}^\sharp = \oplus_{i=1}^r (W(k)/p^{k+1}) e_{i,k+1}$ a toutes les propriétés voulues.

On en déduit le résultat en passant à la limite projective. □

Lemme 5.26. — Si $x \in M$, il existe $c_0(x) \in M^\sharp$, unique, tel que $\psi^n(x - c_0(x)) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Démonstration. — L'unicité résulte de ce que ψ est bijectif sur $M^\sharp$, et donc $\psi^n(x) \to 0$ implique $x = 0$, si $x \in M^\sharp$.

Passons à l'existence. Soit $x \in M$. Alors l'image de $\psi^n(x)$ dans $M_k = M/p^k M$ appartient à $M_k^\sharp$, si $n \geq n(x,k)$. Maintenant, ψ est bijectif sur $M_k^\sharp$ et, si on note ψ_k^{-n} l'inverse de ψ^n sur $M_k^\sharp$, alors $\psi_k^{-n}(\psi^n(x))$ ne dépend pas du choix de $n \geq n(x,k)$. On note $c_{0,k}(x) \in M_k^\sharp$ cette quantité ; on a $c_{0,k+1}(x) = c_{0,k}(x)$ dans $M_k^\sharp$, et donc les $c_{0,k}(x)$ définissent un élément $c_0(x)$ de $M^\sharp$. Par construction, $\psi^n(x) = \psi^n(c_0(x))$ modulo p^k, si $n \geq n(x,k)$.

Ceci permet de conclure. □

Lemme 5.27. — Si M est muni d'un opérateur φ_M tel que $\psi \circ \varphi_M = 1$, tout élément x de M peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $x = c_0(x) + \sum_{i \geq 1} \varphi_M^{i-1}(c_i(x))$, avec $c_0(x) \in M^\sharp$, $c_i(x) \in M^{\psi=0}$ et $c_i(x) \to 0$ quand $i \to +\infty$.

Démonstration. — Si $c_0 + \sum_{i \geq 1} \varphi_M^{i-1}(c_i) = 0$, alors $\psi^n(c_0) + \sum_{i \geq n} \varphi_M^{i-n}(c_i) = 0$, et donc $\psi^n(c_0) \to 0$. Il s'ensuit que $c_0 = 0$. En appliquant $\varphi_M^n \psi^n$ à la série, on démontre alors par récurrence que $\varphi_M^{i-1}(c_i) = 0$ et donc $c_i = 0$, pour tout i. On en déduit l'unicité.

Pour l'existence, posons $c_i(x) = (1 - \varphi_M\psi)(\psi^{i-1}(x - c_0(x)))$, si $i \geq 1$. Comme $\psi \circ (1 - \varphi_M\psi) = \psi - \psi = 0$, on a $\psi(c_i(x)) = 0$, et comme $\psi^{i-1}(x - c_0(x)) \to 0$, on a $c_i(x) \to 0$. L'identité $x = c_0(x) + \sum_{i \geq 1} \varphi_M^{i-1}((1 - \varphi_M\psi)(\psi^{i-1}(x - c_0(x))))$ est alors immédiate. □

5.4.3. Application au calcul de la cohomologie de de Rham. — Les groupes $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ et $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}}$ sont munis d'actions de φ et ψ, et on a $\psi \circ \varphi = p$.

On peut appliquer le lemme 5.27 à $M = \mathscr{O}(Y)$ (et $\varphi_M = \varphi$) et $M = \Omega^1(Y)$ (et $\varphi_M = p^{-1}\varphi$). On obtient des décompositions

$$\text{(5.28)}\quad \mathscr{O}(Y) = M_0^\sharp \oplus \big(\widehat{\oplus}_{i \geq 0} \varphi^i(\mathscr{O}(Y)^{\psi=0})\big), \quad \Omega^1(Y) = M_1^\sharp \oplus \big(\widehat{\oplus}_{i \geq 0} p^{-i}\varphi^i(\Omega^1(Y)^{\psi=0})\big).$$

Par ailleurs, comme $\psi^n \circ d = p^n\, d \circ \psi^n$ et que ψ est surjectif sur $M_0^\sharp$, on a $d = 0$ sur $M_0^\sharp$, et donc $M_0^\sharp = \mathscr{O}_{\check{C}}$. On en déduit, en utilisant le lemme 5.27, le résultat suivant.

Proposition 5.29. — L'application naturelle $H^1_{\mathrm{dR}}(Y) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}}$ induit un isomorphisme $M_1^\sharp \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}}$ qui est ψ et φ-équivariant, et on a une décomposition ψ et φ-équivariante

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}} \oplus H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{tors}}.$$

De plus,

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}} = \mathscr{O}_{\check{C}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} (H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}})^{\psi=1}.$$

Démonstration. — $M_1^\sharp$ est de rang fini sur $\mathscr{O}_{\check{C}}$ et stable par ψ qui agit bijectivement et φ^{-1}-semi-linéairement. Il résulte du théorème de Dieudonné-Manin que $M_1^\sharp$ admet une base $e_1, \dots, e_d$ sur $\mathscr{O}_{\check{C}}$, telle que $\psi(e_i) = e_i$ pour tout i. Mais alors $(\varphi - p) \cdot e_i$ est tué par ψ puisque

$\psi\circ\varphi = p$, et donc $(\varphi - p)\cdot e_i = 0$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ (cela découle du lemme 5.24). Autrement dit, $\varphi(e_i) = pe_i$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$, ce qui prouve que $M_1^\sharp$ est stable par φ et permet de conclure. □

5.4.4. Injectivité du régulateur syntomique. — Soit $\tilde{R}$ une $\mathrm{A_{inf}}$-algèbre séparée et complète pour la topologie $(p,\tilde{p})$-adique, et telle que $\tilde{R}/p$ soit intègre et intégralement close. On suppose $\tilde{R}$ munie d'un frobenius φ relevant $x\mapsto x^p$ sur $\tilde{R}/p$ (on a donc $\varphi(x)-x^p\in p\tilde{R}$, si $x\in\tilde{R}$) et coïncidant avec le frobenius usuel sur $\mathrm{A_{inf}}$.

Soit $\tilde{R}^{**} = \varinjlim_{r>0} 1+(p,\tilde{p}^r)\tilde{R}\subset\tilde{R}^*$.

Lemme 5.30. — Soit $x\in\tilde{R}^{**}$.

(i) Si $x^p=\varphi(u)$, avec $u\in\tilde{R}$, alors il existe $u'\in\tilde{R}^{**}$ tel que $x=\varphi(u')$ et $u=(u')^p$.

(ii) Si $\varphi(x)/x^p = v^{p^N}$, avec $v\in\tilde{R}$, alors il existe $u\in\tilde{R}^{**}$ tel que $x=u^{p^N}$.

Démonstration. — Nous allons commencer par montrer que si $x\equiv 1+[\beta]b_1 \pmod p$, avec $b_1\in\tilde{R}$ et $\beta\in\mathfrak{m}_{C^\flat}$, alors on peut trouver $u\equiv 1 \bmod [\beta^{1/p}]$ et $b_2\in\tilde{R}$ tels que $x/\varphi(u)\equiv 1+[\beta^2]b_2 \bmod p$. Ecrivons $x=1+pa_1+[\beta]b_1$ avec $a_1,b_1\in\tilde{R}$. On a alors $x^p = 1+p(pa_1+[\beta]b_1)+[\beta]^pb_1^p \bmod p(p,[\beta])^2$ et $\varphi(1+[\beta]b_1)=1+[\beta]^p(b_1^p+pb_1')$, avec $b_1'\in\tilde{R}$, et donc $x^p/\varphi(1+[\beta]b_1)=1+py$, avec $y=pa_1+[\beta]b_1 \bmod (p,[\beta])^2$. De plus, comme $x^p=\varphi(u)$, on en déduit que y est de la forme $\varphi(v)$, avec $v\in\tilde{R}$ (à priori $v\in\tilde{R}[1/p]$, mais comme $\tilde{R}/p$ est réduit, on voit que l'on a $v\in\tilde{R}$). Il en résulte qu'il existe $z\in\tilde{R}$ tel que $[\beta]b_1+[\beta]^2z$ soit une puissance p-ième modulo p. Puisque $\tilde{R}/p$ est intégralement clos, il s'ensuit que $b_1+[\beta]z$ est une puissance p-ième modulo p et donc il existe $b_1'\in\tilde{R}$ tel que $b_1+[\beta]z\equiv\varphi(b_1')$ mod p. Mais alors $[\beta]b_1\equiv\varphi([\beta^{1/p}]b_1') \bmod (p,[\beta]^2)$ et donc $x/\varphi(1+[\beta^{1/p}]b_1') = 1+pa_2+[\beta^2]b_2$ pour certains $a_2,b_2\in\tilde{R}$, ce qui permet de conclure.

En réitérant ce procédé, et en passant à la limite, on voit que l'on peut écrire $x=\varphi(u_0)(1+pa)$ pour des $u_0,a\in\tilde{R}$. Comme $(1+pa)^p=\varphi(u/u_0)$, on a $p^2(a+p(\frac{p-1}{2}a^2+\cdots)) = \varphi((u/u_0)-1)$, et comme $\tilde{R}/p$ est intègre, cela implique que $\varphi((u/u_0)-1)=p^2\varphi(w)$, et donc [37] que $a=(a_1')^p$ modulo p. Cela permet d'écrire $1+pa$ sous la forme $(1+p\varphi(a_1'))(1+p^2a_1)$ et, par récurrence et passage à la limite, $1+pa$ sous la forme $\varphi(\prod(1+p^ka_k'))$. Ceci prouve le (i).

Passons au (ii). On a $\varphi(x)=(xv^{p^{N_1}})^p$, et il résulte du (i) qu'il existe u_0 tel que $x=u_0^p$. Mais alors $(\varphi(u_0)/u_0^p)^p = v^{p^N}$ ce qui, si $p\neq 2$, implique $\varphi(u_0)/u_0^p = v^{p^{N-1}}$ et une récurrence immédiate fournit le résultat (si $p=2$, le même raisonnement s'applique en remplaçant éventuellement u_0 par $-u_0$). □

L'injectivité de $\delta_Y : \mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}}) \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y,1)$ est une conséquence du résultat plus précis suivant.

Lemme 5.31. — Si $\frac{d\tilde{u}_1}{\tilde{u}_1}$ et $\frac{1}{p}\log\frac{\varphi(\tilde{u}_1)}{\tilde{u}_1^p}$ sont divisibles par p, alors u_1 est une puissance p-ième.

37. Si $p=2$, on obtient $a+a^2=(a_1')^2$ mod 2, et donc $a=(a+a_1')^2$ mod 2.

Démonstration. — On peut écrire $u_1 = ab$, avec $a \in \mathrm{Fr}(\mathscr{O}(\check{Y}))$ et $b \in \mathscr{O}(Y)^{**}$. (On regarde u_1 sur la fibre spéciale (après avoir divisé par p^r pour obtenir un élément de valuation 0) et on prend pour a un relèvement dans $\mathrm{Fr}(\mathscr{O}(\check{Y}))$.) La condition $\frac{d\tilde{u}_1}{\tilde{u}_1}$ divisible par p implique que u_1 est une puissance p-ième sur la fibre spéciale, et donc peut se relever en une puissance p-ième, ce qui permet de supposer que $a = 1$, et donc que $u_1 \in \mathscr{O}(Y)^{**}$. Le lemme 5.30 permet alors d'en déduire que $\tilde{u}_1$ est une puissance p-ième (car $\frac{\varphi(\tilde{u}_1)}{\tilde{u}_1^p} = \big(\exp(\frac{1}{p}\log\frac{\varphi(\tilde{u}_1)}{\tilde{u}_1^p})\big)^p$ en est une). On en déduit que u_1 est une puissance p-ième, ce que l'on voulait. □

5.4.5. Bijectivité du régulateur syntomique. — On note $H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\mathrm{sep}}$ le quotient de $H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})$ par l'adhérence de son sous-groupe de torsion. Il résulte de la description de $H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})$ donnée dans la prop. 5.29 que l'on a

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\mathrm{sep}} = M_1^{\sharp} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}_{\mathrm{cris}}.$$

Proposition 5.32. — Si $p > 2$, on a une suite exacte (si $p = 2$, la suite est presque exacte)

$$0 \to \mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y,1) \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} \to 0.$$

Démonstration. — Il résulte du lemme 5.15 que $\mathscr{O}(Y)^{**}$ s'envoie sur 0 dans $(H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$, et donc que $\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$ aussi ; la suite est donc un complexe.

• L'exactitude à droite résulte de la surjectivité de $H^1_{\mathrm{syn}}(Y,1) \to H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\varphi=p}$ (cf. suite exacte 5.12) et de ce que $H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\mathrm{sep}}$ s'identifie à un sous-module de $H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})$ stable par φ (prop. 5.29), et donc $(H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} \subset H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\varphi=p}$.

• L'exactitude à gauche, i.e. l'injectivité de $\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y,1)$, résulte du lemme 5.31 puisque $\mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}})$ contient $\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$.

• Il reste à prouver l'exactitude au milieu. Soit $(e_j)_{j\in J}$ une base orthonormale de $\mathscr{O}(\check{Y})^{\psi=0}$ sur $\mathscr{O}_{\check{C}}$. Soit $x \in H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\varphi=p}_{\mathrm{tors}}$ et soit $\hat{x} \in \Omega^1(\widetilde{Y})$ ayant pour image x. Il résulte des décompositions (5.28) que l'on peut écrire $\hat{x}$, de manière unique, sous la forme $\hat{x} = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\in J} b_{i,j} d(p^{-i}\varphi^i(e_j))$, avec $b_{i,j} \in \mathbf{A}_{\mathrm{cris}}$ et $b_{i,j} \to 0$ quand $(i,j) \to \infty$, et la condition $(\varphi - p)\hat{x} = 0$ se traduit par l'existence de $a_{i,j} \in \mathbf{A}_{\mathrm{cris}}$, $a_{i,j} \to 0$ quand $(i,j) \to \infty$, tels que $b_{1,j} = a_{1,j}$ et $b_{i,j} = \varphi(b_{i-1,j}) + p^{i-1}a_{i,j}$ si $i \geq 2$. On a alors

$$b_{i,j} = \varphi^{i-1}(a_{1,j}) + p\varphi^{i-2}(a_{2,j}) + \cdots + p^{i-1}a_{i,j}.$$

On déduit la prop. 5.32 du lemme 5.33 ci-dessous en raisonnant comme pour la preuve de la prop. 4.7 (i.e. en utilisant la décomposition $\mathbf{A}_{\mathrm{cris}} = \mathscr{O}_{\check{C}} \oplus \mathrm{Ker}\,\theta_0$, puis le fait que $\mathbf{A}_{\mathrm{cris}} = \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{\tilde{p}^k}{k!},\ k \geq 0]^{\wedge}$ et enfin, le fait que tout élément de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ a un développement de Teichmüller). □

Lemme 5.33. — Si $e \in \mathscr{O}(\check{Y})$ et $v_{C^\flat}(a) > 0$, alors $\Sigma(a,e) = \sum_{i\geq 0}[a^{p^i}]d(p^{-i}\varphi^i(e))$ peut s'écrire sous la forme $\frac{dv}{v}$ avec $v \in \mathscr{O}(\widetilde{Y})^*$.

Démonstration. — D'après la rem. 2.13 de [2], il existe une suite d'applications $\delta_n : \mathscr{O}(\widetilde{Y}) \to \mathscr{O}(\widetilde{Y})$, pour $n \geq 0$, avec $\delta_0(x) = x$, telles que

$$\varphi^n(x) = \delta_0(x)^{p^n} + p\delta_1(x)^{p^{n-1}} + \cdots + p^n\delta_n(x).$$

On en déduit que

$$\sum_{i\geq 0} p^{-i}[a^{p^i}]\varphi^i(e) = \sum_{n\geq 0} \ell([a^{p^n}]\delta_n(e)), \quad \text{avec } \ell(x) = \sum_{k\geq 0} p^{-k}x^{p^k}.$$

Il s'ensuit que

$$\exp\big(\sum_{i\geq 0} p^{-i}[a^{p^i}]\varphi^i(e)\big) = \prod_{n\geq 0} \exp_{\mathrm{AH}}([a^{p^n}]\delta_n(e)),$$

où $\exp_{\mathrm{AH}}$ est l'exponentielle d'Artin-Hasse (qui appartient à $1 + X\mathbf{Z}_p[[X]]$); le produit converge dans $\mathscr{O}(\widetilde{Y})^{**}$ et si v est le résultat, on a $\frac{dv}{v} = \Sigma(a, e)$, ce que l'on voulait. □

Théorème 5.34. — δ_Y : $\mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}}) \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y, 1)$ est un isomorphisme si $p > 2$ (si $p = 2$, c'est presque un isomorphisme).

Démonstration. — Cela résulte, via le lemme des 5, du diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} & \longrightarrow & \mathrm{Symb}_p(Y^{\mathrm{gen}}) & \longrightarrow & (\mathbf{A}_{\mathrm{cris}} \otimes H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{syn}}(Y, 1) & \longrightarrow & (\mathbf{A}_{\mathrm{cris}} \otimes H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(L'exactitude de la ligne du haut est la prop. 5.21 et celle de la ligne du bas est la prop. 5.32.) □

6. Cohomologie des courbes quasi-compactes

Dans ce chapitre, on calcule la cohomologie d'une courbe quasi-compacte à partir d'une triangulation : une telle triangulation fournit un patron de la courbe et on exprime toutes les cohomologies en termes des cohomologies des termes de ce patron : en particulier, les symboles (prop. 6.2), la cohomologie étale ℓ-adique (th. 6.3 plus formule de Picard-Lefschetz de la rem. 6.4), la cohomologie de de Rham (cor. 6.10) et sa séparée (th. 6.14), la cohomologie de Hyodo-Kato (th. 6.21 et rem. 6.22). Cela permet de relier les symboles p-adiques, la cohomologie syntomique et la cohomologie étale p-adique (th. 6.24 et cor. 6.25). Enfin, on exprime la cohomologie syntomique en termes du complexe de de Rham (rem. 6.27 et th. 6.30) et on en déduit le th. 0.1 (cf. th. 6.32).

6.1. Notations. — Soit Y une courbe quasi-compacte sur C (i.e. un affinoïde ou une courbe propre). Soit S une triangulation de Y, et soit Y_S le $\mathscr{O}_C$-modèle semi-stable associé. On suppose S suffisamment fine pour que :

• la fibre spéciale Y_S^{sp} ait au moins deux composantes irréductibles

• ces composantes irréductibles soient lisses et deux d'entre elles s'intersectent en au plus un point,

• les shorts Y_s, pour $s \in S$, soient [38] petits.

Soit $(\Gamma, (Y_i)_{i\in I}, (\iota_{i,j})_{(i,j)\in I_{2,c}})$ un patron de Y associé à S (cf. § 3.5); cela inclut :

• un graphe bipartite marqué $\Gamma = (I, I_2, \mu)$, avec $I = S \sqcup A_c$ et $I_{2,c} = \{(a,s),\ a \in A_c,\ s \in S(a)\}$, $\mu(a) \in \mathbf{Q}_+^*$ si $a \in A_c$,

• des shorts Y_s pour $s \in S$, des jambes Y_a pour $a \in A_c$ (avec Y_a de longueur $\mu(a)$), la fibre spéciale Y_s^{sp} de Y_s étant propre (et lisse) par convention (avec certains points marqués de multiplicité 0^+ si $s \in \partial Y$),

• si $a \in A_c$, un paramètre local T_{a,s_1} de Y_a (ce qui fournit une orientation de Y_a et donc fixe une origine s_1 et un bout s_2) admettant un prolongement à des ouverts de Y_{s_1} et Y_{s_2}, et $T_{a,s_2} = p^{\mu(a)}/T_{a,s_1}$,

• des cercles fantômes $Y_{a,s}$, pour $a \in A(s)$, avec $\mathscr{O}(Y_{a,s}) = \mathscr{O}_C[[T_{a,s}, T_{a,s}^{-1}\rangle$,

A ces données, on rajoute deux entiers $N_1(S)$ et $N(S)$ définis par [39] :

• $N_1(S)$ est le plus petit entier N tel que $p^N\mu(a) \geq 1$, pour tout $a \in A_c$.

• $N(S)$ est le plus petit entier $N \geq N_1(S)$ tel que $T_{a,s} \in \mathscr{O}(\breve{Y}_s) + p^{1/p^N}\mathscr{O}(Y_s)$, pour tout $(a,s) \in I_{2,c}$.

On rappelle que $\Sigma(Y)$ est l'ensemble des noeuds de Y ; on a $\Sigma(Y) \subset S$.

6.2. Cohomologie étale

6.2.1. Localisation des symboles. — Soit ℓ un nombre premier. On a défini les groupes $\mathrm{Symb}_\ell(Z)$ pour $Z = Y, Y_i^{\mathrm{gen}}, Y_{i,j}^{\mathrm{gen}}$ (cf. n° 5.1.3 pour Y et Y_s^{gen} et n° 4.1.2 pour Y_a^{gen} et $Y_{a,s}^{\mathrm{gen}}$). Les restrictions induisent des applications naturelles

$$\mathrm{Symb}_\ell(Y) \to \mathrm{Symb}_\ell(Y_i^{\mathrm{gen}}) \to \mathrm{Symb}_\ell(Y_{i,j}^{\mathrm{gen}}).$$

Posons

$$A_{\ell,\infty}(Y_S) = \left\{ \begin{array}{c} ((u_{i,n}, v_{i,n} \in C(Y_i)^*)_{i\in I, n\in\mathbf{N}}, (g_{i,j,n} \in C(Y_{i,j})^*)_{(i,j)\in I_{2,c}, n\in\mathbf{N}}, \\ u_{i,n+1} = u_{i,n}v_{i,n}^{\ell^n},\ u_{i,n} = g_{i,j,n}^{\ell^n}u_{j,n},\ g_{i,j,n+1}^{\ell} = g_{i,j,n}\frac{v_{i,n}}{v_{j,n}} \end{array} \right\},$$

$$A_{\ell,\infty}(Y_S)^{\mathrm{triv}} = \{(a_{i,n}^{\ell^n}, a_{i,n+1}^{\ell}/a_{i,n})_{i\in I, n\in\mathbf{N}}, (a_{i,n}/a_{j,n})_{(i,j)\in I_{2,c}, n\in\mathbf{N}}\} \subset A_{\ell,\infty}(Y_S)$$

38. Cette dernière condition n'intervient que dans le § 6.4 où l'on utilise les résultats du § 5.4. Si on part d'une triangulation S vérifiant les deux premiers points, on en fabrique une vérifiant le dernier de la manière suivante : si $s \in S$, on peut décomposer le short Y_s en un petit short et un nombre fini de boules ouvertes, tubes de points de la fibre spéciale ; on peut décomposer chacune de ces boules en une boule fermée et une couronne, et il suffit de rajouter à S les points de Gauss de ces boules fermées pour obtenir une triangulation ayant les propriétés voulues.

39. Si Y_S est défini sur K, d'indice de ramification absolu e, alors $N_1(S) \leq N(s) \leq \lceil \frac{\log e}{\log p} \rceil$.

On pose alors

$$\mathrm{Symb}_\ell(Y_S) = A_{\ell,\infty}(Y_S)/A_{\ell,\infty}(Y_S)^{\mathrm{triv}}.$$

Lemme 6.1. — On a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Symb}_\ell(Y_S) \cong \mathrm{Symb}_\ell(Y).$$

Démonstration. — Compactifions Y en recollant des disques Y_a le long des cercles fantômes $Y_{a,s}$, pour $a \in A \setminus A_c$ (auquel cas $S(a)$ n'a qu'un élément $s = s(a)$), via $T_{s,a}$. On note X la courbe ainsi obtenue (si Y est propre, alors $X = Y$, bien sûr) ; c'est l'analytifiée d'une courbe algébrique propre d'après GAGA rigide.

Posons $g_{i,j,n} = 1$ si $(i,j) \in I_2 \setminus I_{2,c}$. Les $g_{i,j,n}$, pour $(i,j) \in I_2$, définissent un fibré en droites $\mathscr{F}$ sur X vu comme espace adique, et par le principe GaGa, cela fournit [(40)] un fibré en droites sur X vu comme variété rigide et donc, grâce à GAGA rigide, un fibré en droites sur la courbe algébrique sous-jacente.

$\mathscr{F}$ étant algébrique sur X, il possède une section globale méromorphe sur X tout entier et donc, a fortiori, sur Y. Autrement dit, on peut trouver des $g_{i,n} \in C(Y_i^{\mathrm{gen}})^*$, pour $i \in I$, tels que $\frac{g_{i,n}}{g_{j,n}} = g_{i,j,n}$. Les $\frac{u_{i,n}}{g_{i,n}^{\ell^n}}$ se recollent alors pour fabriquer $u_n \in A_{\ell,n}(Y)$, et on a $u_{n+1} = u_n\big(\frac{v_{i,n}g_{i,n}}{g_{i,n+1}^{\ell}}\big)^{p^n}$ sur Y_i. Or $\frac{v_{i,n}g_{i,n}}{g_{i,n+1}^{\ell}} = \frac{v_{j,n}g_{j,n}}{g_{j,n+1}^{\ell}}$ sur $Y_{i,j}$ puisque $g_{i,j,n+1}^{\ell} = g_{i,j,n}\frac{v_{i,n}}{v_{j,n}}$, et donc les $\frac{v_{i,n}g_{i,n}}{g_{i,n+1}^{\ell}}$ se recollent en $v_n \in C(Y)^*$. Il s'ensuit que $(u_n, v_n)_n \in A_{\ell,\infty}(Y)$.

Les $g_{i,n}$ sont uniques à multiplication simultanée près par $g_n \in C(Y)^*$. Il s'ensuit que l'image de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{Symb}_\ell(Y)$ ne dépend pas du choix des $g_{i,n}$, ce qui fournit une flèche naturelle $\mathrm{Symb}_\ell(Y_S) \to \mathrm{Symb}_\ell(Y)$.

Cette flèche est surjective car $(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A_{\ell,\infty}(Y)$ est, bien évidemment, l'image de $(u_{i,n}, v_{i,n})_{i\in I, n\in\mathbb{N}}, (g_{i,j,n})_{(i,j)\in I_{2,c}, n\in\mathbb{N}}$, où $u_{i,n}$ et $v_{i,n}$ sont les restrictions de u_n et v_n à Y_i et $g_{i,j,n} = 1$.

Elle est injective car, si l'image est triviale, $u_n = a_n^{\ell^n}$ et $v_n = a_{n+1}^{\ell}/a_n$, et donc $u_{i,n} = (a_n g_{i,n})^{\ell^n}$, $v_{i,n} = (a_{n+1}g_{i,n+1})^{\ell}/(a_n g_{i,n})$ et $g_{i,j,n} = (a_n g_{i,n})/(a_n g_{j,n})$, ce qui montre que notre symbole localisé est trivial.

Ceci permet de conclure. □

Proposition 6.2. — On a une suite exacte

$$0 \to H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_\ell(1)) \to \mathrm{Symb}_\ell(Y_S) \to \mathrm{Ker}\big[\prod_{i\in I} \mathrm{Symb}_\ell(Y_i^{\mathrm{gen}}) \to \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \mathrm{Symb}_\ell(Y_{i,j}^{\mathrm{gen}})\big] \to 0.$$

40. $\mathscr{F}$ admet des sections globales e_i sur Y_i, pour $i \in I'$, et on a $e_a = g_{a,s,n}e_s$ sur $Y_{a,s}$. Si $U_{a,s}$ est un ouvert de Y_s sur lequel $T_{a,s}$ est holomorphe, il résulte du lemme 4.2 que l'on peut factoriser $g_{a,s,n}$ sous la forme $u_{a,s}v_{a,s}$, avec $u_{a,s} \in \mathscr{O}(U_{a,s})^*$ et $v_{a,s} \in \mathscr{O}(Y_a)^*$. Il s'ensuit que $\mathscr{F}$ admet une section globale $e_{a,s}$ sur $V_{a,s} = U_{a,s} \sqcup Y_a$ (recollés le long de $Y_{a,s}$), où $e_{a,s} = u_{a,s}^{-1}e_s$ sur $U_{a,s}$ et $e_{a,s} = v_{a,s}e_a$ sur Y_a). Les $V_{a,s}$ formant un recouvrement de X par des ouverts rigides, cela définit un fibré en droites sur X vu comme variété rigide.

Démonstration. — Partons de symboles $(u_{i,n}, v_{i,n}) \in A_{\ell,\infty}(Y_i)$ se recollant sur $Y_{i,j}$. Il existe donc $g_{i,j,n}$ tel que $u_{i,n} = g_{i,j,n}^{\ell^n} u_{j,n}$ sur $Y_{i,j}$, et comme cela ne définit $g_{i,j,n}$ qu'à une racine ℓ^n-ième de l'unité près, on peut, par récurrence sur n, imposer que $g_{i,j,n+1} = g_{i,j,n}^{\ell} \frac{v_{i,n}}{v_{j,n}}$. On en déduit la surjectivité à droite.

Pour l'exactitude au milieu, on part de $A_{\ell,\infty}(Y_S)$ tel que $u_{i,n} = v_{i,n} = 1$, pour tous $i \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors les $(g_{i,j,n})_n$ définissent un élément $g_{i,j}$ de $\mathbf{Z}_\ell(1)$ et le résultat appartient à $A_{\ell,\infty}(Y_S)^{\text{triv}}$ si et seulement si il existe des $a_i \in \mathbf{Z}_\ell(1)$, pour $i \in I$, tels que $g_{i,j} = a_i - a_j$. Le passage au quotient nous donne, grâce à la rem. 1.4, le $H^1(\Gamma, \mathbf{Z}_\ell(1))$ que l'on voulait. □

6.2.2. Le cas $\ell \neq p$. — Si $\ell \neq p$, la prop. 6.2, combinée avec le lemme 6.1 et l'isomorphisme $\text{Symb}_\ell(Y) \cong H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1))$ du cor. 5.5, fournit une description concrète de $H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1))$. Voir aussi [20, 5.2] pour une approche un peu différente.

Théorème 6.3. — Si $\ell \neq p$, alors $H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1))$ admet une filtration naturelle dont les quotients successifs sont :

$$H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1)) = \big[\ H^1(\Gamma, \mathbf{Z}_\ell(1)) \text{ — } \textstyle\prod_{s\in\Sigma(Y)} H^1_{\text{et}}(Y_s^{\text{sp}}, \mathbf{Z}_\ell(1)) \text{ — } H^1_c(\Gamma, \mathbf{Z}_\ell)^* \ \big].$$

Démonstration. — La prop. 6.2 fournit le premier cran de la filtration. Le second cran est le noyau de l'application résidu dont l'image est

$$\text{Ker}\big[\prod_{i\in I} \text{Ker}\big[\partial_i^* : \mathbf{Z}_\ell^{\partial^{\text{ad}} Y_i} \to \mathbf{Z}_\ell^{\{i\}}\big] \to \mathbf{Z}_\ell^{I_{2,c}}\big]$$

(prop. 5.10 combinée avec l'isomorphisme $H^1_{\text{et}}(Y_s^{\text{sp}}, \mathbf{Z}_\ell(1)) \cong T_\ell \text{Pic}(Y_s^{\text{sp}}) = T_\ell(J(Y_s^{\text{sp}}))$ pour $s \in S$, et prop. 4.5 pour $i \in A_c$). On conclut en utilisant les rem. 1.3 et 1.4, et en supprimant les $s \in S \backslash \Sigma(Y)$ puisque, pour un tel s, on a $Y_s^{\text{sp}} = \mathbf{P}^1$ et donc $H^1_{\text{et}}(Y_s^{\text{sp}}, \mathbf{Z}_\ell(1)) = 0$. □

Remarque 6.4. — (i) Comme $H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) = \mathbf{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1))$, la description ci-dessus de $H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_\ell(1))$ permet, grâce à la rem. 1.6, de définir, si $t \in \mathbf{Z}_\ell(1)$, un opérateur de monodromie

$$tN : H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)).$$

(ii) Le choix de $r \mapsto p^r$ fournit une section de la projection modulo $H^1(\Gamma, \mathbf{Q}_\ell(1))$. En effet, on peut imposer à $(u_{i,n}, v_{i,n})_n \in A_{\ell,\infty}(Y_i)$ les conditions supplémentaires suivantes :

• si $i = a \in A_c$, alors $u_{i,n} = T_{a,s_1}^{k_{a,n}}$, où $k_{a,n}$ a une limite $k_a \in \mathbf{Z}_\ell$,

• si $i = s \in S$, alors la restriction de $u_{s,n}$ à $Y_{a,s}$, pour $a \in A(s)$, est de la forme $T_{a,s}^{k_{s,a,n}} u_{s,n}^0$, avec $u_{s,n}^0 \in \mathscr{O}(Y_{a,s})^{**}$.

(Pour $a \in A_c$, cela suit de la prop. 4.5 ; pour $s \in S$, cela résulte de ce qu'on peut multiplier $u_{s,n}$ par $f_{s,n}^{\ell^n}$, avec $f_{s,n} \in C(Y)^*$, ce qui permet de modifier à loisir le coefficient dominant en un nombre fini de points.)

Comme $x \in \mathscr{O}(Y_{a,s})^{**}$ a une racine ℓ^n-ième naturelle, à savoir $\sum_{k\geq 0} \binom{1/\ell^n}{k} (x-1)^k$, il en est de même de $\frac{u_{a,n}}{u_{s,n}}$, si $a \in A_c$ et $s \in S(a) = \{s_1, s_2\}$:

– Si $s = s_1$, $\frac{u_{a,n}}{u_{s,n}} = T_{a,s}^{k_{a,n} - k_{a,s,n}} (u_{s,n}^0)^{-1}$ et $k_{a,n} - k_{a,s,n} \in \ell^n \mathbf{Z}$.

– Si $s = s_2$, $\frac{u_{a,n}}{u_{s,n}} = p^{k_{a,n}\mu(a)} T_{a,s}^{-(k_{a,n}+k_{a,s,n})} (u_{s,n}^0)^{-1}$ et $k_{a,n} + k_{a,s,n} \in \ell^n \mathbf{Z}$, et $p^{k_{a,n}\mu(a)}$ a comme racine ℓ^n-ième $p^{\ell^{-n} k_{a,n}\mu(a)}$.

Si on note $g_{a,s,n}$ la racine ℓ^n-ième naturelle de $\frac{u_{a,n}}{u_{s,n}}$, on fabrique un scindage $s_{r\mapsto p^r}$ en envoyant la classe de $(u_{i,n}, v_{i,n})_{i,n}$ sur celle de $((u_{i,n}, v_{i,n})_{i,n}, (g_{i,j,n})_{i,j,n})$.

(iii) Si on change $r \mapsto p^r$ en $r \mapsto \zeta(r)p^r$, où ζ est un morphisme de groupes de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ dans le groupe des racines de l'unité, cela multiplie $g_{a,s_2,n}$ par $\zeta(\ell^{-n} k_{a,n}\mu(a))$ sans modifier $g_{a,s_1,n}$. On en déduit la formule ☛ de Picard-Lefschetz ☚

$$s_{r\mapsto\zeta(r)p^r} = s_{r\mapsto p^r} + t_\zeta N,$$

où $t_\zeta = (\zeta(\ell^{-n}))_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{Z}_\ell(1)$.

Remarque 6.5. — Si Y est défini sur $\mathscr{O}_K$, on peut utiliser ce qui précède pour décrire l'action du sous-groupe d'inertie I_K de G_K sur $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$, mais il vaut mieux prendre les jambes Y_a de la forme $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_K[[Y_{a,s_1}, Y_{a,s_2}]]/(Y_{a,s_1}Y_{a,s_2} - \pi^{e\mu(a)}))$, où π est une uniformisante de K, e l'indice de ramification absolu de K (et $e\mu(a)$ est entier), et choisir un morphisme $r \mapsto \pi^r$ (de $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ dans C^*) plutôt que $r \mapsto p^r$.

Si $\sigma \in I_K$, il existe $\zeta_\ell : \mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}] \to \mu_{\ell^n}$ tel que l'on ait $\sigma(\pi^r) = \zeta_\sigma(r)\pi^r$, et alors $t_\sigma = (\zeta_\sigma(\ell^{-n}))_n \in \mathbf{Z}_\ell(1)$ et $\sigma \mapsto t_\sigma$ est un 1-cocycle sur I_K à valeurs dans $\mathbf{Z}_\ell(1)$, et on a $\sigma(c) = c + t_\sigma N(c)$ si $c \in H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$. Voir [33] pour un point de vue différent.

6.3. Cohomologie de de Rham et variantes

On peut calculer les diverses cohomologies de Y_S à la Čech, en utilisant le recouvrement par les Y_i, pour $i \in I$. Ce calcul est simplifié par le fait que les seules intersections non vides sont les $Y_{i,j}$, pour $(i,j) \in I_{2,c}$. Par exemple (prop. 3.20), les groupes $H^i_{\text{dR}}(Y_S)$ de cohomologie de de Rham (logarithmique) de Y_S sont les groupes de cohomologie du complexe :

$$C^\bullet_{\text{dR}}(Y_S) := \big[\prod_{i\in I} \Omega^\bullet(Y_i) \longrightarrow \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \Omega^\bullet(Y_{i,j})\big].$$

Le complexe ci-dessus est le complexe naturel pour calculer la cohomologie de de Rham mais, à $p^{2N(S)}$ près, on peut aussi utiliser

$$\overline{C}^\bullet_{\text{dR}}(Y_S) := \big[\prod_{i\in I} \Omega^\bullet(Y_i) \longrightarrow \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \overline{\Omega}^\bullet(Y_{i,j})\big],$$

où $\overline{\Omega}^\bullet(Y_{i,j})$ est le quotient de $\Omega^\bullet(Y_{i,j})$ défini dans la discussion précédant le lemme 4.13 ci-dessous.

6.3.1. Cohomologie de de Rham. — Soit

$$S_{\text{int}} = S \setminus \partial Y.$$

Si $s \in S$, on construit une compactification partielle $Y_s^\lozenge$ de Y_s en recollant, via les $T_{a,s}$, les disques ouverts $\{v_p(T_{a,s}) > 0\}$ le long des cercles fantômes $Y_{a,s}$, pour $a \in A_c(s)$.

Remarque 6.6. — Si $s \in S_{\text{int}}$, alors $Y_s^\lozenge$ est propre ; si $s \in \partial Y$, c'est un short.

On note $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0$ l'ensemble des $\omega \in H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})$ tels que $\mathrm{Res}_a(\omega) = 0$ pour tout $a \in A(s)\setminus A_c(s)$. (Si $s \in S_{\mathrm{int}}$, alors $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0 = H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})$, mais si $s \in \partial Y$ et $|A(s)\setminus A_c(s)| = r$, alors $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0$ est de corang $r-1$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})$.)

Remarque 6.7. — $Y_s^{\lozenge}$ dépend du choix des $T_{a,s}$, mais $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})$ (et donc aussi $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0$) n'en dépend pas car il s'identifie à la cohomologie convergente de Y_s^{sp} si $s \in S_{\mathrm{int}}$, et à celle de l'ouvert complémentaire des points de multiplicité 0^+ si $s \in \partial Y$.

Proposition 6.8. — $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)$ a une filtration dont les quotients successifs sont, à $p^{N_1(S)}$ près,

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S) = \big[\ H^1(\Gamma,\mathscr{O}_C) \text{ —— } \textstyle\prod_{s\in S} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0 \text{ —— } H^1_c(\Gamma,\mathscr{O}_C)^*\ \big].$$

Démonstration. — On a une suite exacte

$$0 \to H^0_{\mathrm{dR}}(Y_S) \to \prod_{i\in I} H^0_{\mathrm{dR}}(Y_i) \to \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} H^0_{\mathrm{dR}}(Y_{i,j}) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S) \to \prod_{i\in I} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_i) \to \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_{i,j}).$$

Le sous-groupe $H^1(\Gamma,\mathscr{O}_C)$ correspond au conoyau de $\prod_{i\in I} H^0_{\mathrm{dR}}(Y_i) \to \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} H^0_{\mathrm{dR}}(Y_{i,j})$.

Le quotient $H^1_c(\Gamma,\mathscr{O}_C)^*$ est fourni par l'application résidu comme dans la preuve du th. 6.3.

Si $a \in A_c$, on a

$$\Omega^1(Y_a) = \Omega^1(B_{a,s_1}) \oplus \Omega^1(B_{a,s_2}) \oplus \mathscr{O}_C \tfrac{dT_{a,s_1}}{T_{a,s_1}},$$

où B_{a,s_1} est la boule ouverte avec $\mathscr{O}(B_{a,s_i}) = \mathscr{O}_C[[T_{a,s_i}]]$, si $i = 1,2$. Cette décomposition induit une décomposition

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y_a) = H^1_{\mathrm{dR}}(B_{a,s_1}) \oplus H^1_{\mathrm{dR}}(B_{a,s_2}) \oplus \mathscr{O}_C \tfrac{dT_{a,s_1}}{T_{a,s_1}}.$$

Maintenant, l'image de $H^1_{\mathrm{dR}}(B_{a,s_i})$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_{a,s_{3-i}})$ est tuée par $p^{N_1(S)}$ (cf. lemme 4.13). Il s'ensuit que le complexe $\prod_{i\in I} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_i)_0 \to \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_{i,j})_0$ se $p^{N_1(S)}$-décompose en

$$\prod_{s\in S}\Big[H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s)_0 \oplus \prod_{a\in A_c(s)} H^1_{\mathrm{dR}}(B_{a,s}) \to \prod_{a\in A_c(s)} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_{a,s})_0\Big].$$

Or le noyau de $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s)_0 \oplus \prod_{a\in A_c(s)} H^1_{\mathrm{dR}}(B_{a,s}) \to \prod_{a\in A_c(s)} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_{a,s})_0$ n'est autre que $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0$ comme on le voit en considérant le recouvrement de $Y_s^{\lozenge}$ formé de Y_s et des $B_{a,s}$, pour $a \in A_c(s)$. (On aurait aussi pu utiliser la prop. 6.12 ci-dessous.)

On en déduit le résultat. □

Remarque 6.9. — On a $H^1_{\mathrm{dR}}(Y) \xleftarrow{\sim} C \otimes_{\mathscr{O}_C} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)$ pour tout S; en particulier $C \otimes_{\mathscr{O}_C} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)$ ne dépend pas de S. Cela peut se voir directement : si on raffine S en S', la flèche naturelle $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y_{S'})$ induit un isomorphisme $C\otimes_{\mathscr{O}_C} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S) \xrightarrow{\sim} C\otimes_{\mathscr{O}_C} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_{S'})$ car :

- $\Gamma^{\mathrm{ad}}(S')$ se rétracte sur $\Gamma^{\mathrm{ad}}(S)$ et donc a même cohomologie.
- Les $Y_s^{\lozenge}$, pour $s \in S'\setminus S$, sont des P^1 et donc $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0 = 0$ si $s \in S'\setminus S$.

Après avoir éliminé les P^1 superflus, on obtient le corollaire ci-dessous.

Corollaire 6.10. — $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ a une filtration dont les quotients successifs sont

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y) = \left[\ H^1(\Gamma, C) \text{ —— } \prod_{s\in\Sigma(Y)} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^\lozenge)_0 \text{ —— } H^1_c(\Gamma, C)^*\ \right].$$

Remarque 6.11. — Si Y est propre, tous les $Y_s^\lozenge$ sont propres et ont une cohomologie de dimension finie, ce qui est en accord avec le fait que $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ est de dimension finie. Si Y est un affinoïde, alors $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ est de dimension infinie ; c'est dû au fait que ∂Y est non vide et que, si $s \in \partial Y$, alors $Y_s^\lozenge$ est un $\mathscr{O}_C$-short et donc sa cohomologie est de dimension infinie.

6.3.2. Dégénérescence de courbes. — On note Y_S^∞ la courbe obtenue en spécialisant en $(0)_{a\in A_c}$ la famille de courbes du n° 3.6.3 dans le cas $R = \mathscr{O}_C[[T_a,\ a \in A_c]]$, ce qui remplace Y_a par la réunion Y_a^∞ de deux disques attachés en un point P_a. Alors Y_S^∞ est aussi la courbe obtenue en recollant les $Y_s^\lozenge$ en les P_a : i.e. on identifie le point $T_{a,s_1} = 0$ de $Y_{s_1}^\lozenge$ avec le point $T_{a,s_2} = 0$ de $Y_{s_2}^\lozenge$, pour tout $a \in A_c$.

Proposition 6.12. — Les complexes $\overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(Y_S^\infty)$ et $\overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(Y_S)$ sont naturellement $p^{N_1(S)}$-quasi-isomorphes, et la cohomologie de de Rham (logarithmique) de Y est donc naturellement isomorphe à celle de Y^∞.

Démonstration. — Les groupes intervenant dans les complexes $C^\bullet_{\mathrm{dR}}(Y_S^\infty)$ et $C^\bullet_{\mathrm{dR}}(Y_S)$ sont naturellement isomorphes : $\mathscr{O}(Z^\infty) = \mathscr{O}(Z)$ et $\Omega^1(Z^\infty) = \Omega^1(Z)$, si $Z = Y_s, Y_{a,s}$ et, si $Z = Y_a$,

$$\mathscr{O}(Y_a^\infty) = \mathscr{O}_C[[T_{a,s_1}T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2}), \quad \mathscr{O}(Y_a) = \mathscr{O}_C[[T_{a,s_1}T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2} - p^{\mu(a)}),$$

et on dispose d'un isomorphisme $\mathscr{O}_C$-linéaire [41] qui envoie T^k_{a,s_i} sur T^k_{a,s_i}, si $k \geq 0$; l'isomorphisme correspondant $\Omega^1(Y_a^\infty) \xrightarrow{\sim} \Omega^1(Y_a)$ envoie $T^k_{a,s_i}\frac{dT_{a,s_i}}{T_{a,s_i}}$ sur $T^k_{a,s_i}\frac{dT_{a,s_i}}{T_{a,s_i}}$ si $k \geq 0$ (pour $k = 0$ les deux valeurs obtenues coïncident puisque $\frac{dT_{a,s_1}}{T_{a,s_1}} + \frac{dT_{a,s_2}}{T_{a,s_2}} = 0$).

Le lemme 4.13 permet de montrer que ceci définit un $p^{N_1(S)}$-quasi-isomorphisme $\overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(Y_S^\infty) \to \overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(Y_S)$, ce qui permet de conclure. □

6.3.3. Cohomologie de de Rham séparée. — Le groupe $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)$ peut avoir de la torsion d'exposant non borné (c'est effectivement le cas si Y est un affinoïde) ; on note $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)^{\mathrm{sep}}$ son quotient par l'adhérence $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)_{\mathrm{tors}}$ du sous-groupe de torsion : on a $H^1_{\mathrm{dR}}(Y) = C \otimes_{\mathscr{O}_C} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)$ et $C \otimes_{\mathscr{O}_C} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)^{\mathrm{sep}}$ est le séparé de $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ (i.e. son quotient par l'adhérence de 0).

Exemple 6.13. — (i) Si Y est propre, $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)$ est sans torsion et $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)^{\mathrm{sep}} = H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)$.

(ii) Si Y est la fibre générique d'un $\mathscr{O}_C$-short Y_S, alors $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)^{\mathrm{sep}}$ est le $\mathscr{O}_C$-module $M_1^\sharp$ de la prop. 5.29 ; il est de rang fini, mais la torsion de $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)$ est d'exposant non borné.

41. Ce n'est pas un morphisme d'anneaux puisque $T_{a,s_1}T_{a,s_2} = 0$ dans $\mathscr{O}(Y_a^\infty)$ et $T_{a,s_1}T_{a,s_2} = \tilde{p}^{\mu(a)}$ dans $\mathscr{O}(Y_a)$.

On note Γ_{int} le sous-graphe de Γ dont les sommets sont S_{int} et les arêtes A_{int}, i.e. l'ensemble des $a \in A$ telles que $S(a) \subset S_{\text{int}}$; alors Γ_{int} est un graphe compact.

Théorème 6.14. — (i) Le groupe $H^1_{\text{dR}}(Y_S)^{\text{sep}}$ est de rang fini et admet une filtration naturelle dont les quotients successifs, à $p^{N_1(S)}$ près, sont :

$$H^1_{\text{dR}}(Y_S)^{\text{sep}} = \big[\ H^1(\Gamma_{\text{int}}, \mathscr{O}_C) - \textstyle\prod_{s\in S} H^1_{\text{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0^{\text{sep}} - H^1_c(\Gamma, \mathscr{O}_C)^*\ \big].$$

(ii) Le groupe $H^1_{\text{dR}}(Y)^{\text{sep}}$ est de dimension finie et admet une filtration naturelle dont les quotients successifs sont :

$$H^1_{\text{dR}}(Y)^{\text{sep}} = \big[\ H^1(\Gamma_{\text{int}}, C) - \textstyle\prod_{s\in\Sigma(Y)} (C \otimes_{\mathscr{O}_C} H^1_{\text{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0^{\text{sep}}) - H^1_c(\Gamma, C)^*\ \big].$$

Démonstration. — Le (ii) se déduit du (i) en inversant p et en éliminant les P^1 superflus (cf. rem. 6.9).

Prouvons le (i). Comme le quotient $H^1_c(\Gamma, \mathscr{O}_C)^*$ de $H^1_{\text{dR}}(Y_S)$ est séparé, on a une suite exacte

$$0 \to H^1_{\text{dR}}(Y)_0^{\text{sep}} \to H^1_{\text{dR}}(Y_S)^{\text{sep}} \to H^1_c(\Gamma, \mathscr{O}_C)^* \to 0.$$

Maintenant, si on note M l'intersection de $H^1(\Gamma, \mathscr{O}_C)$ et de l'adhérence de $(H^1_{\text{dR}}(Y_S)_0)^{\text{tors}}$, une petite chasse au diagramme fournit la suite exacte :

$$0 \to H^1(\Gamma, \mathscr{O}_C)/M \to H^1_{\text{dR}}(Y_S)_0^{\text{sep}} \to \prod_s H^1_{\text{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0^{\text{sep}} \to 0.$$

Comme les $H^1_{\text{dR}}(Y_s^{\lozenge})_0^{\text{sep}}$ sont de rang fini (c'est clair si $Y_s^{\lozenge}$ est propre, et si $Y_s^{\lozenge}$ est un short, cela résulte de la prop. 5.20), on en déduit que $H^1_{\text{dR}}(Y_S)^{\text{sep}}$ est de rang fini.

Pour terminer la preuve du théorème, il ne reste donc plus qu'à déterminer M, ce qui fait l'objet du lemme 6.15 ci-dessous. □

Lemme 6.15. — On a

$$\text{Ker}\big[H^1(\Gamma, \mathscr{O}_C) \to H^1_{\text{dR}}(Y_S)^{\text{sep}}\big] = \text{Ker}\big[H^1(\Gamma, \mathscr{O}_C) \to H^1(\Gamma_{\text{int}}, \mathscr{O}_C)\big].$$

Démonstration. — On note A_{ext} l'ensemble des $a \in A$ telles que $S(a) \subset \partial Y$ et $A_{\text{bord}} = A \setminus (A_{\text{ext}} \cup A_{\text{int}})$ l'ensemble des a dont une extrémités appartient à ∂Y et l'autre à A_{int} (on note $s_1 = s_1(a)$ celle appartenant à A_{int} et $s_2 = s_2(a)$ celle appartenant à ∂Y).

On note Y'_S la courbe obtenue en remplaçant $p^{\mu(a)}$ par 0 si $a \in A_{\text{bord}}$ dans le patron de Y_S. Cela remplace les Y_a, pour $a \in A_{\text{bord}}$, par la réunion Y'_a de deux disques B_{a,s_1}, B_{a,s_2} attachés en un point P_a. On note $Y'_{S,\text{int}}$ la réunion des Y_s pour $s \in S_{\text{int}}$, des Y_a pour $a \in A_{\text{int}}$, et des B_{a,s_1} pour $a \in A_{\text{bord}}$; c'est un modèle semi-stable d'une courbe propre.

Les mêmes arguments que pour la preuve de la prop. 6.12 montrent que les complexes $C^{\bullet}_{\text{dR}}(Y_S)_0$ et $C^{\bullet}_{\text{dR}}(Y'_S)_0$ sont $p^{N_1(S)}$-quasi-isomorphes, et qu'on peut calculer $H^1_{\text{dR}}(Y_S)_0$ (à $p^{N_1(S)}$ près) en utilisant $C^{\bullet}_{\text{dR}}(Y'_S)_0$.

La restriction fournit une flèche naturelle $H^1_{\text{dR}}(Y'_S)_0 \to H^1_{\text{dR}}(Y'_{S,\text{int}})_0$. Comme $Y'_{S,\text{int}}$ est propre, $H^1_{\text{dR}}(Y'_{S,\text{int}})_0$ est séparé et la flèche ci-dessus se factorise à travers $H^1_{\text{dR}}(Y'_S)_0^{\text{sep}}$. De plus, cette flèche induit, par restriction, la flèche naturelle $H^1(\Gamma, \mathscr{O}_C) \to H^1(\Gamma_{\text{int}}, \mathscr{O}_C)$, et comme

cette dernière flèche est surjective, on en déduit que le membre de gauche dans l'énoncé du lemme est inclus dans le membre de droite.

Pour prouver l'égalité, il s'agit donc de prouver que $\mathrm{Ker}\big[H^1(\Gamma,\mathscr{O}_C)\to H^1(\Gamma_{\mathrm{int}},\mathscr{O}_C)\big]$ est dans l'adhérence de 0 dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)$. Or ce noyau est engendré par des classes de la forme $e_{a,s}=((\omega_i)_i,(g_{i,j})_{i,j})$, où $S(a)=\{s,s'\}$ et $s\in\partial Y$, avec $\omega_i=0$ pour tout i, $g_{a,s'}=1$ et $g_{i,j}=0$ si $(i,j)\neq(a,s')$.

Comme $k_C\otimes Y_s^{\lozenge}$ est affine puisque $s\in\partial Y$, on peut trouver $\phi\in\mathscr{O}(Y_s^{\lozenge})$ telle que $\phi(P_a)=1$ et $\phi(P_b)=0$ si $b\in A(s)\setminus\{a\}$.

Soit $\alpha\in 1+p\mathscr{O}_C$. Si $n\in\mathbf{N}$, alors $\phi_n=p^n\log(1+(\alpha^{1/p^n}-1)\phi)\in\mathscr{O}(Y_s^{\lozenge})$. On peut donc considérer le bord c_n de $(g_{i,n})_{i\in I}$, où $g_{i,n}=0$ si $i\notin\{s\}\sqcup A(s)$ et $g_{i,n}=\phi_n$ si $i\in\{s\}\sqcup A(s)$. Le lemme suivant montre que $(\log\alpha)e_{a,s}$ est dans l'adhérence de 0 dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)$, ce qui permet de conclure. □

Lemme 6.16. — Il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que, si $n\geq N$, alors $c_n-(\log\alpha)e_{a,s}$ est divisible par p^{n-N}.

Démonstration. — $dg_{i,n}$ est divisible par p^n et, sur $Y_{i,j}$, on a $g_{i,n}-g_{j,n}=0$ sauf si $(i,j)=(b,t)$, avec $b\in A(s)$ et t est l'autre extrémité de b, où $g_{t,n}=0$, mais $g_{b,n}=\phi_n\neq 0$:

• Si $b=a$, comme $\phi(P_a)=1$, on a $v_{Y_{b,t}}(\frac{1+(\alpha^{1/p^n}-1)\phi}{\alpha^{1/p^n}}-1)\geq\mu(a)$, et il existe $N(a)$ (ne dépendant que $\mu(a)$) tel que $v_{Y_{b,t}}(\phi_n-\log\alpha)\geq n-N(a)$.

• Si $b\in A(s)\setminus\{a\}$, comme $\phi(P_b)=0$, on a $v_{Y_{b,t}}((1+(\alpha^{1/p^n}-1)\phi)-1)\geq\mu(b)$, et donc $v_{Y_{b,t}}(\phi_n)\geq n-N(b)$.

Ceci permet de conclure. □

6.3.4. Cohomologie cristalline

• Si $s\in S$, on choisit un modèle $\breve{Y}_s$ de Y_s sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ et un frobenius φ sur $\mathscr{O}(\breve{Y}_s)$. On pose $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_s):=\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}}\mathscr{O}(\breve{Y}_s)$; on a bien évidemment

$$\mathscr{O}(\breve{Y}_s)=\mathscr{O}_{\breve{C}}\widehat{\otimes}_{\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}}\mathscr{O}(\widetilde{Y}_s)\quad\text{et}\quad\mathscr{O}(Y_s)=\mathscr{O}_C\widehat{\otimes}_{\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}}\mathscr{O}(\widetilde{Y}_s).$$

Soit $r(S)=p^{-N(S)}$, de telle sorte que $T_{a,s}\in\mathscr{O}(\breve{Y}_s)+p^{r(S)}\mathscr{O}(Y_s)$, pour tout $(a,s)\in I_{2,c}$. On peut donc écrire $T_{a,s}$, sur Y_s, sous la forme

$$T_{a,s}=T_{a,s,0}+p^{r(S)}T'_{a,s},\quad\text{avec } T_{a,s,0}\in\mathscr{O}(\breve{Y}_s)\text{ et } T'_{a,s}\in\mathscr{O}(Y_s).$$

On choisit un relèvement $\tilde{T}'_{a,s}$ de $T'_{a,s}$ dans $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_s)$, et on pose

$$\tilde{T}_{a,s}=T_{a,s,0}+\tilde{p}^{r(S)}\tilde{T}'_{a,s}\in\mathscr{O}(\widetilde{Y}_s).$$

• Si $a\in A_c$, on pose

$$\mathscr{O}(\widetilde{Y}_a):=\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}[[T_{a,s_1},T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2}-\tilde{p}^{\mu(a)}).$$

On a

$$\mathscr{O}(Y_a)=\mathscr{O}_C\widehat{\otimes}_{\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}}\mathscr{O}(\widetilde{Y}_a).$$

• Si $s \in S(a)$, on pose $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{a,s}) := \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[[T_{a,s}, T_{a,s}^{-1}\rangle$. Si $h \geq 0$, on note $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{a,s})^{\mathrm{PD}_h}$ le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées logarithmiques partielles, de niveau h, du noyau de $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_a) \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_s) \to \mathscr{O}(Y_{a,s})$: si $U_{a,s} = \frac{T_{a,s}\otimes 1}{1\otimes \tilde{T}_{a,s}}$, on a un isomorphisme

$$\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{a,s})^{\mathrm{PD}_h} \cong \mathscr{O}(\widetilde{Y}_{a,s})[\tfrac{(U_{a,s}-1)^k}{[k/p^h]!},\ k \in \mathbf{N}]^{p-\wedge}.$$

Si $h \geq N(S)$, on peut remplacer $U_{a,s}$ par $U'_{a,s} = \frac{T_{a,s}\otimes 1}{1\otimes T_{a,s,0}}$ dans l'isomorphisme ci-dessus car $\tilde{p}^{r(S)}$ a des puissances divisées partielles de niveau h.

• Si $Z = Y_a, Y_s, Y_{a,s}$, on note $\Omega^j(\widetilde{Z})$ le $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$-module $\Omega^j_{\mathscr{O}(\widetilde{Z})/\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}}$, et $\Omega^j(\widetilde{Y}_{a,s})^{\mathrm{PD}}$ le $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$-module $\Omega^j_{\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{a,s})^{\mathrm{PD}}/\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}}$. On a bien sûr $\Omega^j(\widetilde{Z}) = 0$ si $j \geq 2$ (resp. $j \geq 3$) et $Z = Y_a, Y_s$ (resp. $Z = Y_{a,s}$). Le lemme de Poincaré nous donne le résultat suivant :

Lemme 6.17. — Si $h \geq 0$, le complexe de de Rham $\big[\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{a,s}) \to \Omega^1(\widetilde{Y}_{a,s})\big]$ est p^h-quasi-isomorphe au complexe $\big[\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{a,s})^{\mathrm{PD}_h} \to \Omega^1(\widetilde{Y}_{a,s})^{\mathrm{PD}_h}_{d=0}\big]$.

Notons que l'on peut munir $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_s)$ et $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_a)$ d'endomorphismes de Frobenius ($\mathscr{O}(\widetilde{Y}_s)$ par extension des scalaires à partir de $\mathscr{O}(\breve{Y}_s)$ qui est lisse sur $\mathscr{O}_{\breve{C}}$, et $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_a)$, en envoyant T_i sur T_i^p) ; cela munit aussi $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{a,s})^{\mathrm{PD}_h}$ du frobenius produit tensoriel.

On définit les $H^i_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$, pour $i \leq 2$, comme les groupes de cohomologie du complexe [42]

$$C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S) := \big[\prod_{i\in I} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} \Omega^1(\widetilde{Y}_i) \oplus \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}} \longrightarrow \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \Omega^1(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}}_{d=0}\big],$$

la première flèche étant $((f_i)_i) \mapsto ((df_i)_i, (f_i\otimes 1 - 1\otimes f_j)_{i,j})$, et la seconde étant $((\omega_i)_i, (f_{i,j})_{i,j}) \mapsto (\omega_i\otimes 1 - 1\otimes\omega_j - df_{i,j})_{i,j}$. Notons que φ commute aux flèches ci-dessus et donc les $H^i_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ sont munis d'une action de φ.

Remarque 6.18. — (i) Les techniques cristallines à base de lemme de Poincaré permettent de montrer que les $H^i_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$, ainsi que l'action de φ, ne dépendent pas des choix faits : nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les $H^i_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ sont les groupes de cohomologie cristalline logarithmique absolue (i.e. sur Z_p) de $(\mathscr{O}_C/p)\otimes Y_S$.

(ii) Si on remplace PD par PD_h dans la définition ci-dessus, on obtient un complexe p^h-quasi-isomorphe d'après le lemme 6.17.

(iii) On pourrait remplacer $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ par $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$ dans les définitions des $\mathscr{O}(\widetilde{Z})$ et utiliser le cas $R = \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$ du n° 3.6.3 pour produire un schéma formel $\widetilde{Y}_S$ ayant Y_S et $\breve{Y}_S$ comme spécialisations. Malheureusement, on ne peut pas munir $\widetilde{Y}_S$ d'un frobenius global, et son existence n'aide pas pour munir la cohomologie d'une action de φ.

Le complexe $C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ est le cylindre

$$\big[\prod_{i\in I} \Omega^\bullet(\widetilde{Y}_i) \to \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \Omega^{\tau\leq 1}(\widetilde{Y}_{i,j})\big].$$

42. On écrit PD pour PD_0.

Pour faire les calculs, on peut remplacer $C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ par le complexe quasi-isomorphe

$$\overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S) := [\prod_{i\in I}\Omega^\bullet(\widetilde{Y}_i) \to \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \overline{\Omega}^{\tau\leq 1}(\widetilde{Y}_{i,j})],$$

où $\overline{\Omega}^{\tau\leq 1}(\widetilde{Y}_{i,j})$ est le complexe défini pour le lemme 4.14.

6.3.5. Cohomologie de Hyodo-Kato. — On définit les $H^i_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S)$, pour $i \leq 2$, comme les groupes de cohomologie du complexe $C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S) = \mathscr{O}_{\breve{C}} \otimes_{\mathrm{A_{cris}}} C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$. Comme $\theta_0 : \mathrm{A_{cris}} \to \mathscr{O}_{\breve{C}}$ commute à φ, le complexe $C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S)$ est muni d'une action de φ et donc les $H^i_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S)$ aussi.

On cherche à exprimer les $H^i_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ en termes des $H^i_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S)$. Pour ce faire, on remplace PD par PD_h dans la définition de $C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$, ce qui produit un complexe $p^{N(S)}$-isomorphe, si $h = N(S)$.

• Si $i \in I$ ou si $(i,j) \in I_{2,c}$, on pose

$$\mathscr{O}(\breve{Y}_i) = \mathscr{O}_{\breve{C}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A_{cris}}} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_i), \quad \mathscr{O}(\breve{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}_h} = \mathscr{O}_{\breve{C}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A_{cris}}} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}_h}$$

(Il n'y a pas de conflit de notations si $i \in S$.) On dispose de plongements naturels

$$\iota_i : \mathscr{O}(\breve{Y}_i) \to \mathscr{O}(\widetilde{Y}_i), \quad \iota_{i,j} : \mathscr{O}(\breve{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}_h} \to \mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}_h}$$

• si $i \in S$, ce plongement est l'inclusion naturelle et est donc un morphisme d'anneaux qui commute à φ.

• Si $(i,j) = (a,s) \in I_{2,c}$, ce plongement est l'inclusion

$$\mathscr{O}(\breve{Y}_{a,s})[\tfrac{(U'_{a,s}-1)^k}{[k/p^h]!},\ k \in \mathbf{N}]^{p-\wedge} \hookrightarrow \mathscr{O}(\widetilde{Y}_{a,s})[\tfrac{(U'_{a,s}-1)^k}{[k/p^h]!},\ k \in \mathbf{N}]^{p-\wedge}$$

(on a $\mathscr{O}(\breve{Y}_{a,s}) = \mathscr{O}_{\breve{C}}[[T_{a,s}, T_{a,s}^{-1}\rangle)$; c'est un morphisme d'anneaux qui commute à φ.

• Si $i = a \in A$, on a

$$\mathscr{O}(\breve{Y}_a) = \mathscr{O}_{\breve{C}}[[T_{a,s_1}, T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2}), \quad \mathscr{O}(\widetilde{Y}_a) = \mathrm{A_{cris}}[[T_{a,s_1}, T_{a,s_2}]]/(T_{a,s_1}T_{a,s_2} - \tilde{p}^{\mu(a)}),$$

et ι_a est l'application $\mathscr{O}_{\breve{C}}$-linéaire qui envoie T^k_{a,s_i} sur T^k_{a,s_i}. Ce n'est pas un morphisme d'anneaux puisque $T_{a,s_1}T_{a,s_2} = 0$ dans $\mathscr{O}(\breve{Y}_a)$ et $T_{a,s_1}T_{a,s_2} = \tilde{p}^{\mu(a)}$ dans $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_a)$, mais ι_a commute à φ.

Lemme 6.19. — La flèche $\iota : \overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S) \to \overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$, induite par les $\iota_s, \iota_a, \iota_{a,s}$, est un $p^{N(S)}$-morphisme de complexes qui commute à φ.

Démonstration. — C'est une conséquence du lemme 4.14 (et du fait que les $\iota_s, \iota_a, \iota_{a,s}$ commutent à φ). □

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 6.20. — On a des $p^{N(S)}$-isomorphismes (le premier de chaque ligne commute à φ) :

$$\mathrm{A_{cris}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S) \cong \overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S) \quad \text{et} \quad \mathscr{O}_C \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S) \cong \overline{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(Y_S),$$
$$\mathrm{A_{cris}} \otimes_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S)^{\mathrm{sep}} \cong H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\mathrm{sep}} \quad \text{et} \quad \mathscr{O}_C \otimes_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S)^{\mathrm{sep}} \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y_S)^{\mathrm{sep}}.$$

On définit les groupes de cohomologie de Hyodo-Kato $H^i_{\mathrm{HK}}(Y)$ par :

$$H^i_{\mathrm{HK}}(Y) := \breve{C} \otimes_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} H^i_{\mathrm{dR}}(\breve{Y}_S) = \breve{C} \otimes_{\mathrm{A_{cris}}} H^i_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S).$$

(Ces groupes ne dépendent pas de S). Par construction, ce sont des $\breve{C}$-espaces et ils sont munis d'une action semi-linéaire de φ ; on les munit aussi d'un opérateur de monodromie N vérifiant $N\varphi = p\varphi N$ (cf. rem. 6.22 ci-dessous). Le cor. 6.20 a pour conséquence immédiate l'énoncé suivant dans lequel on a posé $H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}) = \mathrm{Q}_p \otimes_{\mathrm{Z}_p} H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ (le résultat ne dépend pas de S).

Théorème 6.21. — (i) On a des isomorphismes (le premier commute à φ) :

$$\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}} \otimes_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}} \cong H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\mathrm{sep}} \quad \text{et} \quad \iota_{\mathrm{HK}} : C \otimes_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}} \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}}.$$

(ii) $H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\mathrm{sep}}$ est un $\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}$-module libre de rang fini et on a des identifications

$$C \otimes_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}} H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\mathrm{sep}} = H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}} \quad \text{et} \quad \breve{C} \otimes_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}} H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y})^{\mathrm{sep}} = H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}},$$

la seconde étant φ-équivariante.

Remarque 6.22. — (o) ι_{HK} est l'isomorphisme de Hyodo-Kato.

(i) En reprenant les arguments des preuves de la prop. 6.8 et du th. 6.14, on obtient les résultats suivants, si $Z = \widetilde{Y}, \breve{Y}$, et si $\Lambda_Z = \mathrm{A_{cris}}$ ou $\mathscr{O}_{\breve{C}}$ suivant que $Z = \widetilde{Y}$ ou $Z = \breve{Y}$: le groupe $H^1_{\mathrm{dR}}(Z_S)$ a une filtration stable par φ dont les quotients successifs sont, à $p^{N(S)}$ près,

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Z_S) = \big[\ H^1(\Gamma, \Lambda_Z) \text{ —— } \textstyle\prod_{s\in S} H^1_{\mathrm{dR}}(Z^{\lozenge}_s)_0 \text{ —— } H^1_c(\Gamma, \Lambda_Z)^*(-1)\ \big].$$

Le (-1) signifie que l'action naturelle de φ est multipliée par p (car $\varphi(\frac{dT_{a,s}}{T_{a,s}}) = p\frac{dT_{a,s}}{T_{a,s}}$).

(ii) En utilisant l'isomorphisme $C \otimes_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}} \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}}$, le th. 6.14 et la prop. 5.20, on prouve que le groupe $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}$ admet une filtration naturelle stable par φ dont les quotients successifs sont [43] :

$$H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}} = \big[\ H^1(\Gamma_{\mathrm{int}}, \breve{C}) - \big(\prod_{s\in\Sigma(Y)_{\mathrm{int}}} H^1_{\mathrm{cris}}(Y^{\mathrm{sp}}_s)\big) \oplus \big(\prod_{s\in\partial Y} H^1_{\mathrm{cris}}(Y^{\mathrm{sp}}_s)^{[1]}\big) - H^1_c(\Gamma, \breve{C})^*(-1)\ \big].$$

(iii) L'opérateur $N_\mu : H^1_c(\Gamma, \Lambda_Z)^* \to H^1(\Gamma, \Lambda_Z)$ du n° 1.2.4 induit des opérateurs (de monodromie) vérifiant $N \circ N = 0$ et $N\varphi = p\varphi N$, et compatibles entre eux (par extension des scalaires)

$$N : H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}) \to H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}), \quad N : H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}} \to H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}.$$

43. Rappelons que $M^{[1]}$ désigne la partie de pente 1 d'un $\breve{C}$-espace M de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de φ.

6.4. Cohomologie syntomique et cohomologie étale p-adique

6.4.1. Cohomologie syntomique. — Si $i \in I$, on note $F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y}_i)$ le noyau du morphisme surjectif $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_i) \to \mathscr{O}(Y_i)$, et si $(i,j) \in I_{2,c}$, on note $F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}}$ le noyau de $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}} \to \mathscr{O}(Y_{i,j})$.

On note $\mathrm{Syn}(Y_S,1)$ le complexe total associé au complexe double

$$\begin{array}{ccccc}
\prod_{i\in I} F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y}_i) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}\Omega^1(\widetilde{Y}_i)\oplus\prod_{(i,j)\in I_{2,c}} F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}} & \longrightarrow & \prod_{(i,j)\in I_{2,c}}\Omega^1(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}}_{d=0} \\
\downarrow{\scriptstyle 1-\frac{\varphi}{p}} & & \downarrow{\scriptstyle 1-\frac{\varphi}{p}} & & \downarrow{\scriptstyle 1-\frac{\varphi}{p}} \\
\prod_{i\in I} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_i) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}\Omega^1(\widetilde{Y}_i)\oplus\prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}} & \longrightarrow & \prod_{(i,j)\in I_{2,c}}\Omega^1(\widetilde{Y}_{i,j})^{\mathrm{PD}}_{d=0}
\end{array}$$

Les $H^i_{\mathrm{syn}}(Y_S,1)$ sont les groupes de cohomologie du complexe $\mathrm{Syn}(Y_S,1)$.

6.4.2. Comparaison syntomique-étale. — Si $u=(u_n)_n \in \mathrm{Symb}_p(Y)$, et si $i \in I$, on choisit des relèvements $\tilde{u}_{i,n}$ et $(u_n)_{|Y_i}$ comme précédemment, ce qui permet d'associer à u un 1-cocycle $((x_i,y_i)_i,(z_{i,j})_{i,j})$ de $\mathrm{Syn}(Y_S,1)$, en posant

$$(x_i,y_i)=\delta_{Y_i}(u_{|Y_i})=\big(\lim_{n\to\infty}\tfrac{d\tilde{u}_{i,n}}{\tilde{u}_{i,n}},\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{p}\log\tfrac{\varphi(\tilde{u}_{i,n})}{\tilde{u}_{i,n}^p}\big),$$
$$z_{i,j}=\lim_{n\to\infty}\log\tfrac{\tilde{u}_{i,n}\otimes 1}{1\otimes\tilde{u}_{j,n}}$$

(on a $z_{i,j}\in F^1\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})$ car $u_{i,n}$ et $u_{j,n}$ coïncident sur $Y_{i,j}$). L'image $\delta_{\tilde{p}}(u)$ de ce 1-cocycle dans $H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S,1)$ ne dépend que de u, ce qui fournit une application

$$\delta_{\tilde{p}}:\mathrm{Symb}_p(Y)\to H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S,1).$$

Remarque 6.23. — L'application

$$\delta_{\tilde{p}}:\mathrm{Symb}_p(Y)\to H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p}$$

dépend du choix de $r\mapsto p^r$. En effet, si on modifie $r\mapsto p^r$, cela change $\tilde{p}$ en $\tilde{p}[\varepsilon]$, avec $\varepsilon=(1,\varepsilon_1,\dots)\in\mathscr{O}_{C^\flat}$, et cela change T_{a,s_2} en $[\varepsilon^{\mu(a)}]T_{a,s_2}$ sur $\widetilde{Y}_a$, et donc aussi z_{a,s_2} en $z_{a,s_2}+\mathrm{Res}_a(\frac{du}{u})\mu(a)\log[\varepsilon]$.

Théorème 6.24. — L'application $\delta_{\tilde{p}}:\mathrm{Symb}_p(Y)\to H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S,1)$ définie ci-dessus est un isomorphisme si $p>2$ (si $p=2$, c'est presque un isomorphisme).

Démonstration. — On a un diagramme commutatif dans lequel les suites horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(\Gamma,\mathbf{Z}_p(1)) & \longrightarrow & \mathrm{Symb}_p(Y) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}\mathrm{Symb}_p(Y_i) \longrightarrow \prod_{(i,j)\in I_{2,c}}\mathrm{Symb}_p(Y_{i,j}) \\
 & & \downarrow\wr & & \downarrow & & \downarrow\wr \qquad\qquad \downarrow\wr \\
0 & \longrightarrow & H^1(\Gamma,\mathbf{Z}_p t) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S,1) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}H^1_{\mathrm{syn}}(Y_i,1)\longrightarrow\prod_{(i,j)\in I_{2,c}}H^1_{\mathrm{syn}}(Y_{i,j},1)
\end{array}$$

Les isomorphismes verticaux sont établis dans la prop. 5.32 pour les Y_i avec $i\in S$, et dans la prop. 4.11 pour les Y_i, avec $i\in A$, et les $Y_{i,j}$. Le résultat s'en déduit. □

En combinant le résultat précédent avec celui du cor. 5.5, on obtient :

Corollaire 6.25. — On a des isomorphismes naturels si $p > 2$ (si $p = 2$, la flèche de droite est un isomorphisme, celle de gauche est presque un isomorphisme)

$$H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1) \xleftarrow{\sim} \text{Symb}_p(Y) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}_p(1)).$$

6.4.3. Cohomologie syntomique et complexe de de Rham. — On note $\text{HK}(Y_S, 1)$ le complexe $\text{Syn}(Y_S, 1)$ avec $F^1\mathscr{O}(\widetilde{Z})$ remplacé par $\mathscr{O}(\widetilde{Z})$ et $\mathscr{O}(\widetilde{Z})$ par $\mathscr{O}(\widetilde{Z})' = \mathscr{O}(\widetilde{Z}) + \frac{\varphi}{p}\mathscr{O}(\widetilde{Z})$, si $Z = Y_i, Y_{i,j}$. Le quotient $\text{HK}(Y_S, 1)/\text{Syn}(Y_S, 1)$ est p-isomorphe au complexe

$$[\prod_{i\in I} \mathscr{O}(Y_i) \to \prod_{(i,j)\in I_{2,c}} \mathscr{O}(Y_{i,j})]$$

qui calcule la cohomologie du faisceau $\mathscr{O}$.

On note HK^i_S les groupes de cohomologie du complexe $\text{HK}(Y_S, 1)$. On a une suite p^2-exacte longue

$$0 \to H^0_{\text{syn}}(Y_S, 1) \to \text{HK}^0_S \to \mathscr{O}(Y_S) \to H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1) \to \text{HK}^1_S \to H^1(Y_S, \mathscr{O}) \to H^2_{\text{syn}}(Y_S, 1) \to \text{HK}^2_S \to 0.$$

Proposition 6.26. — On a une suite p^2-exacte

$$0 \to \mathscr{O}(Y_S)/\mathscr{O}_C \to H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1) \to H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p} \to H^1(Y_S, \mathscr{O})$$

Démonstration. — On a $\text{HK}^0_S = H^0_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p} = \mathbf{A}_{\text{cris}}^{\varphi=p}$; on en déduit que

$$H^0_{\text{syn}}(Y_S, 1) = (F^1\mathbf{A}_{\text{cris}})^{\varphi=p} = \mathbf{Z}_p t \quad \text{et} \quad \text{HK}^0_S/H^0_{\text{syn}}(Y_S, 1) \cong \mathscr{O}_C.$$

Par ailleurs, $\text{HK}(Y_S, 1)$ est le cylindre $[\ C_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S) \xrightarrow{1-\frac{\varphi}{p}} C_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)'\ ]$, où $C_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)'$ est obtenu à partir de $C_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ en remplaçant $\mathscr{O}(\widetilde{Z})$ par $\mathscr{O}(\widetilde{Z})'$ si $Z = Y_i, Y_{i,j}$. et comme $1 - \frac{\varphi}{p}$ est surjectif de $H^0(C_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S))$ sur $H^0(C_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)')$, on a $\text{HK}^1_S = H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p}$. On en déduit le résultat. □

Remarque 6.27. — (i) Si Y est propre, alors $\mathscr{O}(Y_S) = \mathscr{O}_C$ et la suite devient

$$0 \to H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1) \to H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p} \to H^1(Y_S, \mathscr{O}) \to H^2_{\text{syn}}(Y_S, 1) \to \cdots$$

(ii) Si Y est un affinoïde, alors $H^1(Y_S, \mathscr{O})$ est tué par une puissance de p, et la torsion de $H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p}$ est d'exposant non borné.

(iii) Une classe de $H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1)$ est représentée par une collection $((\omega_i)_i, (f_{i,j})_{i,j}, (g_i)_i)$ satisfaisant un certain nombre de relations dont $\omega_i \otimes 1 - 1 \otimes \omega_j = df_{i,j}$. Cette relation, modulo F^1, devient $\omega_i - \omega_j = 0$, ce qui fournit une flèche $H^1_{\text{syn}}(Y_S, 1) \to \Omega^1(Y_S)$. De même, modulo F^1, le complexe $C_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)$ devient $C_{\text{dR}}(Y_S)$, ce qui fournit une flèche $H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S) \to H^1_{\text{dR}}(Y_S)$

et un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y_S)/\mathscr{O}_C & \longrightarrow & H^1_{\text{syn}}(Y_S,1) & \longrightarrow & H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p} & \longrightarrow & H^1(Y_S,\mathscr{O}) \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y_S)/\mathscr{O}_C & \longrightarrow & \Omega^1(Y_S) & \longrightarrow & H^1_{\text{dR}}(Y_S) & \longrightarrow & H^1(Y_S,\mathscr{O}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Remarque 6.28. — (i) La flèche $\mathscr{O}(Y_S)/\mathscr{O}_C \to H^1_{\text{syn}}(Y_S,1)$ admet la description suivante [44]. Si $i \in I$ notons simplement R_i,$\tilde{R}_i$ les anneaux $\mathscr{O}(Y_i)$, $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_i)$, et $R_{i,j}$, $\tilde{R}_{i,j}$ les anneaux $\mathscr{O}(Y_{i,j})$, $\mathscr{O}(\widetilde{Y}_{i,j})$, si $(i,j) \in I_{2,c}$. Soit alors $g \in \mathscr{O}(Y_S)$. Si $i \in I$, choisissons un relèvement $\tilde{g}_i$ de la restriction $g_i \in R_i$ de g à Y_i. La famille $\tilde{g} = ((d\tilde{g}_i)_i, ((1-\frac{\varphi}{p})\tilde{g}_i)_i, (\tilde{g}_i \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{g}_j)_{i,j})$ est un 1-cocycle du complexe $\text{Syn}(Y_S,1)$, dont la classe de cohomologie ne dépend que de g, puisque, si $\tilde{g}'$ est un autre choix, alors $\tilde{g}' - \tilde{g}$ est le bord de $(\tilde{g}'_i - \tilde{g}_i)_i$ et $\tilde{g}'_i - \tilde{g}_i \in F^1\tilde{R}_i$ par construction.

(ii) La recette ci-dessus fournit aussi une application naturelle $\mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\text{syn}}(Y_S,1)$. Si $u \in \mathscr{O}(Y)^{**}$, on choisit un relèvement $\tilde{u}_i \in \tilde{R}_i$ de la restriction $u_i \in R_i$ de u à U_i. Comme $v_p(u_i - 1) > 0$, la série définissant $\log \tilde{u}_i$ converge dans $\tilde{R}_i[\frac{1}{p}]$; notons $\tilde{g}_i$ sa somme. On a $(1-\frac{\varphi}{p})\tilde{g}_i = \frac{1}{p}\log(\frac{\varphi(\tilde{u}_i)}{\tilde{u}_i^p}) \in \tilde{R}_i$ car $\frac{\varphi(\tilde{u}_i)}{\tilde{u}_i^p} \in 1 + p\tilde{R}_i$. On a aussi $d\tilde{g}_i = \frac{d\tilde{u}_i}{\tilde{u}_i} \in \tilde{\Omega}^1_i$, et $\tilde{g}_i \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{g}_j = \log \frac{\tilde{u}_i \otimes 1}{1 \otimes \tilde{u}_j} \in F^1\tilde{R}_{i,j}$ puisque $\frac{\tilde{u}_i \otimes 1}{1 \otimes \tilde{u}_j} \in 1 + F^1\tilde{R}_{i,j}$. La famille $\Delta(\tilde{u}) := ((d\tilde{g}_i)_i, ((1-\frac{\varphi}{p})\tilde{g}_i)_i, (\tilde{g}_i \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{g}_j)_{i,j})$ est un 1-cocycle du complexe double $\text{Syn}(Y_S,1)$, dont la classe de cohomologie ne dépend que de u car, si $\tilde{u}'_i$ est un autre relèvement de u, alors $\log \frac{\tilde{u}'_i}{\tilde{u}_i} \in F^1\tilde{R}_i$ puisque $\frac{\tilde{u}'_i}{\tilde{u}_i} \in 1 + F^1\tilde{R}_i$.

L'application ci-dessus se prolonge, par continuité, en une application naturelle $\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\text{syn}}(Y_S,1)$. Pour le voir, on écrit un élément u de $\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$ sous la forme $\prod_{n\geq 0} u_n^{p^n}$ et on envoie u sur la classe de $\sum_{n\geq 0} p^n \Delta(\tilde{u}_n)$ avec des notations évidentes. Il faut vérifier que ceci ne dépend pas de l'écriture et du choix des $\tilde{u}_n$; cela revient à prouver que, si $\prod_{n\geq 0} u_n^{p^n} = 1$, alors $\sum_{n\geq 0} p^n \Delta(\tilde{u}_n)$ est un cobord. Dans ce cas, u_0 est une puissance p-ième dans $\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$ et donc aussi dans $\mathscr{O}(Y)^{**}$, et on peut choisir la racine p-ième v_0 telle que $v_0 \prod_{n\geq 1} u_n^{p^{n-1}} = 1$. On choisit un relèvement $\tilde{v}_0$ de v_0 et alors $\Delta(\tilde{u}_0) = p\Delta(\tilde{v}_0) + dx_0$ (où d est la différentielle de $\text{Syn}(Y_S,1)$, i.e. $\Delta(\tilde{u}_0) - p\Delta(\tilde{v}_0)$ est un cobord). De même, $v_0 u_1 = v_1^p$ avec $v_1 \prod_{n\geq 2} u_n^{p^{n-2}} = 1$, et $\Delta(\tilde{v}_0\tilde{u}_1) = p\Delta(\tilde{v}_1) + dx_1$, etc. Mais alors

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{u}_0) + p\Delta(\tilde{u}_1) + p^2\Delta(\tilde{u}_2) + \cdots &= dx_0 + p\Delta(\tilde{v}_0\tilde{u}_1) + p^2\Delta(\tilde{u}_2) + \cdots \\ &= dx_0 + pdx_1 + p^2\Delta(\tilde{v}_1\tilde{u}_2) + p^3\Delta(\tilde{u}_3) + \cdots \\ &= dx_0 + pdx_1 + p^2x_2 + \cdots = d(x_0 + px_1 + p^2x_2 + \cdots) \end{aligned}$$

Autrement dit, $\sum_{n\geq 0} p^n \Delta(\tilde{u}_n)$ est un cobord, ce que l'on voulait.

44. Elle n'est définie que sur le sous-groupe $\mathscr{O}'(Y_S)$ des g tels que $(1-\frac{\varphi}{p})\tilde{g}_i \in \tilde{R}_i$, pour tout i. Le quotient $\mathscr{O}(Y_S)/\mathscr{O}'(Y_S)$ est tué par p.

(iii) Les deux applications ci-dessus se correspondent via l'exponentielle : si $g \in \mathscr{O}(Y_S)$, alors $\exp(2pg) \in \mathscr{O}(Y)^{**}$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}(Y_S) & \xrightarrow{g\mapsto \exp(2pg)} & \mathscr{O}(Y)^{**} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1_{\text{syn}}(Y_S,1) & \xrightarrow{x\mapsto 2px} & H^1_{\text{syn}}(Y_S,1) \end{array}$$

(iv) La composée de $\mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\text{syn}}(Y_S,1) \to H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p}$ fournit des classes de torsion : si $N \in \mathbf{N}$ est tel que $p^N\tilde{g}_i \in R_i$ pour tout i, alors $p^N c$ est le bord de $(p^N\tilde{g}_i)_{i\in I}$, et la classe de f dans $\text{HK}^1_S = H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p}$ est tuée par p^N. On en déduit que l'application composée

$$\mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\text{syn}}(Y_S,1) \to (H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\text{sep}})^{\varphi=p}$$

est identiquement nulle.

6.4.4. Monodromie. — Pour remédier au problème soulevé dans la rem. 6.23, on va étendre les scalaires à $\mathrm{A}_{\text{st}} = \mathrm{A}_{\text{cris}}[\text{Log}\,\tilde{p}]^{\text{PD}}$, où $\text{Log}\,\tilde{p}$ est transcendant sur A_{cris}, pour faire disparaître la monodromie autour de p. On munit A_{st} d'une action de φ en posant $\varphi(\text{Log}\,\tilde{p}) = p\,\text{Log}\,\tilde{p}$ et de la dérivation $N = \frac{d}{d\,\text{Log}\,\tilde{p}}$. On a $N\varphi = p\varphi N$ et une suite exacte $0 \to \mathrm{A}_{\text{cris}} \to \mathrm{A}_{\text{st}} \xrightarrow{N} \mathrm{A}_{\text{st}} \to 0$. Notons que A_{st} contient $\log(\tilde{p}[\varepsilon]) = \text{Log}\,\tilde{p} + \log[\varepsilon]$ puisque $\log[\varepsilon] \in \mathrm{A}_{\text{cris}}$, et comme $\varphi(\log[\varepsilon]) = p\log[\varepsilon]$, ni A_{st}, ni φ ni N ne dépendent du choix de $\tilde{p}$ (ou, ce qui revient au même, de $r \mapsto p^r$).

Sur $\mathrm{A}_{\text{st}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}_{\text{cris}}} H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)$, on dispose du frobenius $\varphi = \varphi \otimes \varphi$ et de la monodromie $N = N\otimes 1 + 1 \otimes N$, et comme $N^2 = 0$ sur $H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)$, l'application

$$x \mapsto \iota_{\tilde{p}}(x) = 1 \otimes x - (\text{Log}\,\tilde{p}) \otimes Nx$$

définit un isomorphisme

$$\iota_{\tilde{p}} : H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{A}_{\text{st}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}_{\text{cris}}} H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S))^{N=0}$$

qui commute à l'action de φ (et dépend de $\tilde{p}$).

Soit $\alpha : H^1_{\text{syn}}(Y_S,1) \to H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\varphi=p}$ la surjection naturelle (cf. (ii) de la rem. 6.27).

Proposition 6.29. — L'application

$$\iota_{\tilde{p}} \circ \alpha \circ \delta_{\tilde{p}} : \text{Symb}_p(Y) \to (\mathrm{A}_{\text{st}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}_{\text{cris}}} H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S))^{N=0}$$

et la suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}(Y_S)/\mathscr{O}_C \to \text{Symb}_p(Y) \to (\mathrm{A}_{\text{st}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}_{\text{cris}}} H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S))^{N=0,\varphi=p} \to 0$$

ne dépendent pas de $r \mapsto p^r$.

Démonstration. — Comme on l'a vu dans la rem. 6.23, changer $\tilde{p}$ en $\varepsilon\tilde{p}$ change les z_{a,s_2} en $z_{a,s_2} + \text{Res}_a(\frac{du}{u})\mu(a)\log[\varepsilon]$. On en déduit la formule

$$\alpha \circ \delta_{\tilde{p}[\varepsilon]}(u) = \alpha \circ \delta_{\tilde{p}}(u) + N(\alpha \circ \delta_{\tilde{p}}(u))\log[\varepsilon].$$

Maintenant

$$\iota_{\tilde{p}[\varepsilon]}(x) = 1 \otimes x - (\log \tilde{p} + \log[\varepsilon]) \otimes Nx = \iota_{\tilde{p}}(x) - \log[\varepsilon] \otimes Nx.$$

On en déduit l'identité

$$\iota_{\tilde{p}[\varepsilon]}(\alpha \circ \delta_{\tilde{p}[\varepsilon]}(u)) = \iota_{\tilde{p}}(\alpha \circ \delta_{\tilde{p}}(u))$$

qui permet de conclure. □

6.4.5. Affinoïdes. —

Théorème 6.30. — Si Y est un affinoïde, on a une suite p^2-exacte [45]

$$0 \to \mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S, 1) \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} \to H^1(Y_S, \mathscr{O}).$$

Démonstration. — Il résulte du (iv) de la rem. 6.28 que l'on a un complexe $\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S, 1) \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$.

• L'exactitude à gauche, i.e. l'injectivité de $\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} \to H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S, 1)$, est une conséquence du théorème de comparaison symboles-syntomique (th. 6.24) et de la suite exacte de Kummer en cohomologie étale.

• Pour prouver l'exactitude au milieu, partons d'un 1-cocycle $c = ((\omega_i)_i, (f_i)_i, (g_{i,j})_{i,j})$ dans l'adhérence de la torsion. Maintenant, c étant dans l'adhérence de la torsion, il en est de même de sa restriction à Y_i, et il existe $\tilde{v}_i \in \mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \tilde{R}_i^{**}$ tel que $\omega_i = \frac{d\tilde{v}_i}{\tilde{v}_i}$ et $f_i = (1 - \frac{\varphi}{p}) \log \tilde{v}_i$ (cf. prop. 5.32 si $i \in S$, et prop. 4.11 (plus lemme 4.4) si $i \in A_c$; en fait $\tilde{v}_i \in \tilde{R}_i^{**}$, si $i \in A_c$, car $\tilde{R}_i^{**}$ est complet pour la topologie p-adique).

Alors $\log \frac{\tilde{v}_i \otimes 1}{1 \otimes \tilde{v}_j} = g_{i,j} \in F^1 \tilde{R}_{i,j}$. On en déduit, si $v_i = \theta(\tilde{v}_i)$, que $v_i = v_j$ (resp. $v_i^2 = v_j^2$ si $p = 2$) sur $Y_{i,j}$ car $\log v_i = \log v_j$ (ce qui implique que le quotient est une racine de l'unité d'ordre p^N) et $\log \frac{\tilde{v}_i \otimes 1}{1 \otimes \tilde{v}_j}$ est entier, ce qui implique que cette racine de l'unité a un relèvement dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ dont le logarithme est entier, et donc est égale à 1 (ou à -1 si $p = 2$).

Les v_i (resp. les v_i^2) se recollent donc pour donner naissance à $v \in \mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$. Mais alors $c - \delta_{\tilde{p}}(v)$ est dans l'adhérence de la torsion et dans $H^1(\Gamma, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p})$. Une petite modification de la preuve du lemme 6.16 permet alors de prouver que $c - \delta_{\tilde{p}}(v)$ est dans l'image de $\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$, ce qui permet de conclure.

• Comme $\mathrm{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**}$ se surjecte sur $(H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)_{\mathrm{tors}})^{\varphi=p}$, et comme cette flèche se factorise à travers $H^1_{\mathrm{syn}}(Y_S, 1)$ dont l'image dans $H^1(Y_S, \mathscr{O})$ est nulle, cela induit, par passage au quotient, la flèche $(H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} \to H^1(Y_S, \mathscr{O})$ du théorème. L'exactitude en $(H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$ est alors une conséquence de ce qui précède et de la prop. 6.26.

Ceci permet de conclure. □

45. Rappelons que $H^1(Y_S, \mathscr{O})$ est tué par p^N, pour N assez grand.

Remarque 6.31. — Il résulte du (iii) de la rem. 6.27 que la suite exacte du th. 6.30 se complète en le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} & \longrightarrow & H^1_{\text{syn}}(Y_S,1) & \longrightarrow & (H^1_{\text{dR}}(\widetilde{Y}_S)^{\text{sep}})^{\varphi=p} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} & \xrightarrow{\text{dlog}} & \Omega^1(Y_S) & \longrightarrow & H^1_{\text{dR}}(Y_S)^{\text{sep}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel la ligne du haut est $p^{N(S)}$-exacte et celle du bas est un complexe (exact à gauche et à droite mais pas au milieu).

6.4.6. Le théorème de comparaison pour les courbes quasi-compactes. — En modifiant le diagramme du (iii) de la rem. 6.27 grâce à l'isomorphisme du (i) du th. 6.21 et à la suite exacte du th. 6.30, on obtient le résultat suivant, à la surjectivité près de $(\mathbf{B}^+_{\text{st}} \otimes H^1_{\text{HK}}(Y)^{\text{sep}})^{N=0,\varphi=p} \to H^1(Y,\mathscr{O})$ dans le cas compact (dans le cas non compact, on a $H^1(Y,\mathscr{O})=0$ et cette surjectivité est triviale ; voir le (i) de la rem. 6.33 pour le cas compact).

Théorème 6.32. — Si Y est une courbe quasi-compacte, on a un diagramme commutatif dont la première ligne est exacte et la seconde est un complexe :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} & \longrightarrow & H^1_{\text{syn}}(Y,1) & \longrightarrow & (\mathbf{B}^+_{\text{st}} \otimes_{\check{C}} H^1_{\text{HK}}(Y)^{\text{sep}})^{N=0,\varphi=p} & \longrightarrow & H^1(Y,\mathscr{O}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} & \xrightarrow{\text{dlog}} & \Omega^1(Y) & \longrightarrow & H^1_{\text{dR}}(Y)^{\text{sep}} & \longrightarrow & H^1(Y,\mathscr{O}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Remarque 6.33. — (i) Si Y est propre, alors

$$\mathbf{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}(Y)^{**} = 0, \quad H^1_{\text{HK}}(Y)^{\text{sep}} = H^1_{\text{HK}}(Y), \quad \dim_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\text{proet}}(Y,\mathbf{Q}_p(1)) < \infty,$$

et la suite du haut devient

$$0 \to H^1_{\text{proet}}(Y,\mathbf{Q}_p(1)) \to (\mathbf{B}^+_{\text{st}} \otimes_{\check{C}} H^1_{\text{HK}}(Y))^{N=0,\varphi=p} \to H^1(Y,\mathscr{O}) \to 0.$$

L'exactitude à droite peut se prouver en utilisant un argument de Dimensions d'Espaces de Banach : $(\mathbf{B}^+_{\text{st}} \otimes H^1_{\text{HK}}(Y)^{\text{sep}})^{N=0,\varphi=p}$ et $H^1(Y,\mathscr{O})$ sont les C-points d'Espaces de Banach $\mathbb{X}_{\text{st}}$ et $\mathbb{X}_{\text{dR}}$ de Dimension finie [46] et la flèche ci-dessus s'étend en un morphisme $f : \mathbb{X}_{\text{st}} \to \mathbb{X}_{\text{dR}}$. Si Y est de genre g, alors $\mathbb{X}_{\text{dR}}$ est l'espace trivial $\mathbb{V}^g$, de Dimension $(g,0)$, tandis que $\mathbb{X}_{\text{st}}$ est de dimension $\sum_{r_i \le 1}(1-r_i,1)$, où les r_i sont les pentes de φ sur $H^1_{\text{HK}}(Y)$ avec multiplicité ; comme $0 \le r_i \le 1$ et $r_i \mapsto 1-r_i$ est une bijection de l'ensemble des r_i car le cup-produit induit un accouplement parfait, commutant à φ, de $H^1_{\text{HK}}(Y) \times H^1_{\text{HK}}(Y)$ dans $\check{C}(-1) = H^2_{\text{HK}}(Y)$, on a $\text{Dim}(\mathbb{X}_{\text{st}}) = (g,2g)$. On conclut en utilisant [17, cor. 5.17 (ii)] ou bien en utilisant le fait que $\dim_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\text{proet}}(Y,\mathbf{Q}_p(1)) = 2g$ et la formule

$$\text{Dim}(\text{Im}\, f) = \text{Dim}(\mathbb{X}_{\text{st}}) - \text{Dim}(\text{Ker}\, f) = (g,2g) - (0,2g) = (g,0) = \text{Dim}(\mathbb{X}_{\text{dR}}).$$

46. L'espace $\mathbb{X}_{\text{st}}$ est le foncteur $\Lambda \mapsto (\mathbb{B}^+_{\text{st}}(\Lambda) \otimes_{\check{C}} H^1_{\text{HK}}(Y))^{N=0,\varphi=p}$, l'espace $\mathbb{X}_{\text{dR}}$ est le foncteur $\Lambda \mapsto \Lambda \otimes_C H^1(Y,\mathscr{O})$ et $f = (f_\Lambda)_\Lambda$, avec $f_\Lambda = \theta_\Lambda \otimes \iota'_{\text{HK}}$, où $\theta_\Lambda : \mathbb{B}^+_{\text{st}}(\Lambda) \to \Lambda$ est l'application habituelle, et ι'_{HK} est l'application de Hyodo-Kato composée avec la surjection $H^1_{\text{dR}}(Y) \to H^1(Y,\mathscr{O})$.

(ii) si Y n'est pas propre (i.e. Y est un affinoïde), alors $H^1(Y,\mathscr{O})=0$, et la suite devient

$$0\to \mathbf{Q}_p\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathscr{O}(Y)^{**}\to H^1_{\text{proet}}(Y,\mathbf{Q}_p(1))\to (\mathbf{B}_{\text{st}}^+\otimes_{\check{C}} H^1_{\text{HK}}(Y)^{\text{sep}})^{N=0,\varphi=p}\to 0.$$

En particulier, $H^1_{\text{proet}}(Y,\mathbf{Q}_p(1))$ n'est pas de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ puisqu'il contient $\mathbf{Q}_p\otimes(\mathscr{O}(Y)^{**}/1+\mathfrak{m}_C)$ qui est un C-espace de dimension infinie (isomorphe à $\mathscr{O}(Y)/C$ par le logarithme).

7. Affinoïdes surconvergents

Dans ce chapitre, on regarde ce qui se passe quand on transforme un affinoïde en courbe sans bord en le rendant surconvergent : il est bien connu que cela simplifie nettement la structure de la cohomologie de de Rham, et la cohomologie proétale p-adique prend aussi une forme plus sympathique (th. 7.6, la cohomologie proétale ℓ-adique, pour $\ell\neq p$, quant à elle ne change pas). On donne aussi deux interprétations du groupe $(\mathbf{B}_{\text{st}}^+\otimes_{\check{C}}H^1_{\text{HK}}(X))^{N=0,\varphi=p}$, pour X courbe propre, en termes du revêtement universel du groupe p-divisible de la jacobienne de X, l'une (th. 7.9) via la description de la cohomologie proétale p-adique, l'autre (th. 7.12) via l'intégration p-adique.

7.1. Cohomologie d'un affinoïde surconvergent

7.1.1. Structure surconvergente sur un affinoïde. — Soit Y un affinoïde lisse de dimension 1 sur C. On fixe une structure surconvergente $Y^\dagger$ sur Y : on plonge Y dans l'intérieur d'une courbe quasi-compacte X (par exemple en recollant des boules ouvertes le long des cercles fantômes à la frontière de Y pour obtenir (cf. prop. 3.15) une courbe propre). On choisit une triangulation S_X de X contenant une triangulation S_Y de Y, et donc on a une inclusion de squelettes $\Gamma(S_Y)\subset\Gamma(S_X)$. Si $\delta>0$ est assez petit, alors $\{r\in\Gamma(S_X),\ d(r,\Gamma(S_Y))\leq\delta\}$ est le squelette d'une triangulation d'un sous-affinoïde Y_δ de X, et Y_δ est contenu dans l'intérieur de $Y_{\delta'}$ si $\delta<\delta'$; de plus $\cap_{\delta>0}Y_\delta=Y$. Alors $Y^\dagger$ est la limite projective des Y_δ, pour $\delta>0$, i.e.

$$\mathscr{O}(Y^\dagger)=\varinjlim_{\delta>0}\mathscr{O}(Y_\delta)$$

et les Y_δ, pour $\delta>0$, forment une présentation de Y. Le sous-anneau $\mathscr{O}(Y^\dagger)$ de $\mathscr{O}(Y)$ (des fonctions surconvergentes sur Y) dépend du choix de X (ou, ce qui revient au même, de la présentation par les Y_δ), mais deux présentations différentes donnent des $\mathscr{O}(Y^\dagger)$ isomorphes (non canoniquement). En pratique, Y est souvent un sous-affinoïde d'un X comme ci-dessus et on dispose alors d'une présentation naturelle, mais dans le cas contraire tous les objets considérés dépendent du choix d'une présentation.

Si δ est assez petit, alors $Y_\delta\setminus Y$ est contitué de couronnes, une par cercle fantôme à la frontière de Y, ouvertes du côté de Y et fermées de l'autre côté : si X est obtenu en recollant des boules ouvertes D_i^-, on peut identifier D_i^- à la boule unité modulo le choix d'un paramètre local z_i, et alors $Y_\delta\setminus Y$ est la réunion des couronnes $\{z_i\in D_i^-,\ 0<v_p(z_i)\leq\delta\}$.

7.1.2. Cohomologie de de Rham. — On définit les $H^i_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger)$ comme les groupes de cohomologie du complexe $\mathscr{O}(Y^\dagger) \to \Omega^1(Y^\dagger)$. On a

$$H^0_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger) = C \quad \text{et} \quad H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger) = \varinjlim_{\delta>0} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\delta).$$

Proposition 7.1. — L'application naturelle $H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}}$ est surjective.

Démonstration. — Fixons $\delta > 0$. Si $\omega \in \Omega^1(Y)$, on peut écrire ω comme la limite d'une suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$, avec $\omega_n \in \Omega^1(Y_\delta)$, la suite convergeant dans $\Omega^1(Y)$ mais, en général, pas dans $\Omega^1(Y_\delta)$.

Soit $W = H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}}$, et soit $\mathrm{pr} : \Omega^1(Y) \to W$ la projection naturelle. Alors W est de dimension finie ; choisissons en une base $e_1, \dots, e_d$, et munissons W de la valuation $v_W(x_1e_1 + \cdots + x_de_d) = \inf_i v_p(x_i)$. Choisissons $\omega_i \in \Omega^1(Y)$ ayant pour image e_i, et écrivons ω_i comme la limite d'une suite $(\omega_{i,n})_{n\geq 0}$ comme ci-dessus. Alors $\mathrm{pr}(\omega_{i,n})$ tend vers e_i, et il existe n_i tel que $f_i = \mathrm{pr}(\omega_{i,n_i})$ vérifie $v_W(e_i - f_i) > 0$. Les f_i forment donc une base de W, qui est incluse dans l'image de la flèche $H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y)^{\mathrm{sep}}$.

Ceci permet de conclure. □

Si $\beta > \alpha > 0$, on choisit une triangulation de Y_β adaptée à Y_α et Y (on peut supposer, ce que nous ferons, que $S_\beta \setminus S_\alpha = \partial Y_\beta$). Cela nous fournit des modèles sur $\mathscr{O}_C$, semi-stables, $Y_S \subset Y_{S_\alpha} \subset Y_{S_\beta}$ de $Y \subset Y_\alpha \subset Y_\beta$. On note $\Gamma \subset \Gamma_\alpha \subset \Gamma_\beta$ les graphes correspondants : ces graphes ont la même cohomologie car on passe de l'un à l'autre en changeant juste les longueurs des arêtes issues des points de $\partial^{\mathrm{ad}}Y$ (et en rajoutant des points sur ces arêtes).

Lemme 7.2. — L'application naturelle $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\beta) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\alpha)$ se factorise à travers $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\beta)^{\mathrm{sep}}$.

Démonstration. — Si $\delta = \alpha, \beta$, notons $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\delta)_0$ le noyau de l'application $\omega \mapsto \mathrm{Res}(\omega)$, i.e. $\mathrm{Ker}[H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\delta) \to H^1_c(\Gamma_\delta, C)^*]$. Comme $H^1_c(\Gamma, C)^*$, qui est isomorphe à $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\delta)/H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\delta)_0$, est un quotient de $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\delta)^{\mathrm{sep}}$, il suffit de prouver l'énoncé pour $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\beta)_0 \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\alpha)_0$.

La prop. 6.8 nous donne (après avoir inversé p) un diagramme commutatif, dont les lignes sont p^N-exactes (avec N dépendant de α et β)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\Gamma_\beta, C) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\beta)_0 & \longrightarrow & \prod_{s\in S_\beta} H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\diamondsuit_{\beta,s})_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\Gamma_\alpha, C) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\alpha)_0 & \longrightarrow & \prod_{s\in S_\alpha} H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\diamondsuit_{\alpha,s})_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La flèche de droite est le produit sur $s \in S_\beta$ des flèches naturelles :

• si $s \in S_\alpha \setminus \partial Y_\alpha$, alors $Y^\diamondsuit_{\beta,s} = Y^\diamondsuit_{\alpha,s}$ et la flèche correspondante est l'identité,

• si $s \in \partial Y_\alpha$, alors $Y^\diamondsuit_{\beta,s}$ est une compactification de $Y^\diamondsuit_{\alpha,s}$ obtenue en recollant des boules ouvertes le long des cercles fantômes appartenant à Y_s à la frontière de Y_α et la flèche est l'injection naturelle,

• si $s \in \partial Y_\beta$, la flèche correspondante est identiquement nulle.

On conclut en utilisant le th. 6.14, qui fournit une suite exacte

$$0 \to H^1(\Gamma_{\beta,\mathrm{int}}, C) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\beta)_0^{\mathrm{sep}} \to \prod_{s\in S_\beta} H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\lozenge_{\beta,s})_0^{\mathrm{sep}} \to 0,$$

le fait que $\Gamma_{\delta,\mathrm{int}}$ et Γ_δ ont même cohomologie, si $\delta = \alpha, \beta$, et les égalités $H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\lozenge_{\beta,s})_0^{\mathrm{sep}} = H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\lozenge_{\beta,s})_0 = H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\lozenge_{\beta,s})$, si $s \in S_\beta \setminus \partial S_\beta$ (car $Y^\lozenge_{\beta,s}$ est propre), et $H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\lozenge_{\beta,s})_0^{\mathrm{sep}} = 0$ si $s \in \partial S_\beta$ (car $Y_{\beta,s}$ est un disque). □

Corollaire 7.3. — (i) Si $\delta > 0$, l'application naturelle $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\delta) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger)$ induit un isomorphisme $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\delta)^{\mathrm{sep}} \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger)$.

(ii) Le groupe $H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger)$ est de rang fini et admet une filtration naturelle dont les quotients successifs sont :

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger) = \big[\ H^1(\Gamma, C) \text{ — } \textstyle\prod_{s\in\Sigma(Y)} H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\lozenge_s) \text{ — } H^1_c(\Gamma, C)^*\ \big].$$

Démonstration. — D'après le lemme 7.2, on a $H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger) = \varinjlim_{\delta>0} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\delta)^{\mathrm{sep}}$. Or on déduit du th. 6.14 que $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\beta)^{\mathrm{sep}} \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\alpha)^{\mathrm{sep}}$ est un isomorphisme si $\beta > \alpha$ (la surjectivité est immédiate sur la description du théorème, et l'injectivité résulte de ce que $H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\lozenge_s)_0^{\mathrm{sep}} = 0$ si $s \in \partial Y_\delta$ car s est un cercle et $Y^\lozenge_s$ est un disque).

Cela prouve le (i), et le (ii) s'en déduit en utilisant de nouveau le th. 6.14, le fait que $\Gamma_{\delta,\mathrm{int}}$ et Γ_δ ont même cohomologie si $\delta > 0$, et le fait que $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbf{P}^1) = 0$ pour passer de S à $\Sigma(Y)$. □

7.1.3. Cohomologie de Hyodo-Kato. — Si $\beta > \alpha$, on a un morphisme de complexes $C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_\beta) \to C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\widetilde{Y}_\alpha)$ (comme ci-dessus, ce morphisme est l'identité sur toutes les composantes Y_a, Y_s, $Y_{a,s}$, pour $a \in A_\alpha$ et $s \in S_\alpha$, et est l'application nulle sur les autres).

On en déduit une application naturelle $H^1_{\mathrm{HK}}(Y_\beta) \to H^1_{\mathrm{HK}}(Y_\alpha)$ commutant à φ et N et qui se factorise à travers $H^1_{\mathrm{HK}}(Y_\beta)^{\mathrm{sep}}$, et on définit $H^1_{\mathrm{HK}}(Y^\dagger)$ par

$$H^1_{\mathrm{HK}}(Y^\dagger) := \varinjlim_{\delta>0} H^1_{\mathrm{HK}}(Y_\delta) = \varinjlim_{\delta>0} H^1_{\mathrm{HK}}(Y_\delta)^{\mathrm{sep}}.$$

Les isomorphismes $C \otimes_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y_\delta)^{\mathrm{sep}} \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y_\delta)^{\mathrm{sep}} \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger)$ montrent que l'application naturelle $H^1_{\mathrm{HK}}(Y_\delta)^{\mathrm{sep}} \to H^1_{\mathrm{HK}}(Y^\dagger)$ est un isomorphisme pour tout $\delta > 0$. En reprenant les arguments de la preuve du cor. 7.3, on déduit de la rem. 6.22 le résultat suivant :

Proposition 7.4. — Le groupe $H^1_{\mathrm{HK}}(Y^\dagger)$ est de rang fini sur $\breve{C}$ et admet une filtration naturelle dont les quotients successifs sont :

$$H^1_{\mathrm{HK}}(Y^\dagger) = \big[\ H^1(\Gamma, \breve{C}) \text{ — } \textstyle\prod_{s\in\Sigma(Y)} H^1_{\mathrm{cris}}(Y^{\mathrm{sp}}_s) \text{ — } H^1_c(\Gamma, \breve{C})^*\ (-1)\big].$$

Remarque 7.5. — En passant à la limite dans le (i) du th. 6.21, on en déduit un isomorphisme

$$\iota_{\mathrm{HK}} : C \otimes_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y^\dagger) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger).$$

7.1.4. Cohomologie proétale p-adique. — On définit $H^1_{\text{proet}}(Y^\dagger, \mathbf{Q}_p(1))$ par :

$$H^1_{\text{proet}}(Y^\dagger, \mathbf{Q}_p(1)) := \varinjlim_{\delta>0} H^1_{\text{proet}}(Y_\delta, \mathbf{Q}_p(1)).$$

(Notons que $H^1_{\text{proet}}(Y_\delta, \mathbf{Q}_p(1)) = H^1_{\text{et}}(Y_\delta, \mathbf{Q}_p(1))$ car Y_δ est quasi-compact.)

En passant à la limite quand $\delta \to 0$ dans le diagramme du th. 6.32, et en utilisant l'isomorphisme $H^1_{\text{syn}}(Y_\delta, 1) \cong H^1_{\text{et}}(Y_\delta, \mathbf{Q}_p(1))$ du cor. 6.25, on obtient le résultat suivant.

Théorème 7.6. — Si $Y^\dagger$ est un affinoïde surconvergent, on a le diagramme commutatif fonctoriel d'espaces vectoriels topologiques suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y^\dagger)/C & \xrightarrow{\exp} & H^1_{\text{proet}}(Y^\dagger, \mathbf{Q}_p(1)) & \longrightarrow & (\mathbf{B}^+_{\text{st}} \otimes_{\check{C}} H^1_{\text{HK}}(Y^\dagger))^{N=0,\varphi=p} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta\otimes\iota_{\text{HK}}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(Y^\dagger)/C & \xrightarrow{d} & \Omega^1(Y^\dagger) & \xrightarrow{\pi_{\text{dR}}} & H^1_{\text{dR}}(Y^\dagger) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes et toutes les flèches sont d'image fermée.

Démonstration. — Comme $\mathbf{Q}_p \mathbin{\widehat{\otimes}} C^* = 0$, on peut supposer que toutes les fonctions qui interviennent prennent la valeur 1 en Q, où $Q \in Y$ est fixé. Sous cette hypothèse, si $0 < \delta' < \delta$, et si $g \in \mathscr{O}(Y_\delta)^{**}$, alors $g \in 1 + p^{\delta-\delta'}\mathscr{O}(Y_{\delta'})$ d'après la prop. 2.9 (car $g-1$ s'annule sur Y_δ, en Q). Il en résulte que, si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}(Y_\delta)^{**}$, alors $\prod_{n\in\mathbf{N}} f_n^{p^n}$ converge dans $\mathscr{O}(Y_{\delta'})^*$. On en déduit que

$$\varinjlim \mathbf{Q}_p \widehat{\otimes} (\mathscr{O}(Y_\delta)^{**}/C^*) = \mathbf{Q}_p \otimes (\mathscr{O}(Y^\dagger)^{**}/C^*),$$

ce qui fournit le diagramme ci-dessus avec $\mathbf{Q}_p \otimes (\mathscr{O}(Y^\dagger)^{**}/C^*)$ au lieu de $\mathscr{O}(Y^\dagger)/C$. On conclut en utilisant le fait que $\log\ f$ converge dans $\mathscr{O}(Y^\dagger)$ si $f \in \mathscr{O}(Y^\dagger)^{**}$, et que $\log$ induit un isomorphisme

$$\mathbf{Q}_p \otimes (\mathscr{O}(Y^\dagger)^{**}/C^*) \cong \mathscr{O}(Y^\dagger)/C.$$

Les flèches horizontales sont d'image fermée car $H^1_{\text{dR}}(Y^\dagger)$ est séparé, et donc $H^1_{\text{HK}}(Y^\dagger)$ aussi. La flèche verticale de droite est d'image fermée car c'est la trace sur les C-points d'un morphisme d'Espaces de Banach de Dimension finie [13] (on peut aussi utiliser [35, Lemma 3.3] au lieu de la théorie des Espaces de Banach de Dimension finie). Cela implique que la flèche verticale du milieu est d'image fermée (le conoyau s'injecte dans un espace séparé). □

Remarque 7.7. — Si $\ell \neq p$, il résulte du th. 6.3 que l'application naturelle $H^1_{\text{proet}}(Y_\delta, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to H^1_{\text{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est un isomorphisme pour tout $\delta > 0$. Il s'ensuit que l'on a un isomorphisme

$$H^1_{\text{proet}}(Y^\dagger, \mathbf{Q}_\ell(1)) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)),$$

et donc que rendre un affinoïde surconvergent ne change pas sa cohomologie proétale ℓ-adique, si $\ell \neq p$; c'est très loin d'être le cas si $\ell = p$ comme le montre une comparaison des th. 7.6 et 6.32 (ou plutôt du (ii) de la rem. 6.33).

7.1.5. Le revêtement universel du groupe p-divisible de la jacobienne. — Soit X une courbe propre définie sur un sous-corps complet K de C ; notons J sa jacobienne ; alors $J(C)$ est naturellement un groupe de Lie sur C. On note $\widehat{J}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ d'éléments de $J(C)$ telles que $x_n = p\cdot x_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, et $x_n \to 0$ quand $n \to -\infty$. Alors $\widehat{J}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel muni d'une action continue de G_K et contenant $V_p(J) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(J)$ (qui n'est autre que le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel des $x = (x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, avec $x_n = 0$ si $n \ll 0$). L'application logarithme

$$\log_J : J(C) \to C \otimes_K \mathrm{Lie}(J)$$

induit une application

$$\log_J : \widehat{J} \to C \otimes_K \mathrm{Lie}(J)$$

(envoyant (x_n) to $p^n \log_J x_n$, pour n'importe quel choix de n), et donne naissance à la suite exacte

$$0 \to V_p(J) \to \widehat{J} \to C \otimes_K \mathrm{Lie}(J) \to 0$$

de G_K-modules.

Remarque 7.8. — Supposons que X est obtenu en compactifiant un affinoïde Y par recollement de boules ouvertes D_i^- le long des cercles fantômes à la frontière de Y. Notons $\iota : X \to J$ l'injection envoyant $P \in X$ sur la classe de $P - P_0$, où P_0 est fixé. Si $\delta > 0$, soient $Y_\delta = Y \setminus \big(\cup_i D(P_i,\delta)^-\big)$ et H_δ le sous-groupe de J engendré par les $\iota(D(P_i,\delta)^-)$. On a une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Q}_p\widehat{\otimes}(\mathscr{O}(Y_\delta)^{**}/C^*) \to H^1_{\text{et}}(Y_\delta, \mathbf{Q}_p(1))_0 \to V_p(J/H_\delta) \to 0,$$

pour tout $\delta > 0$. Maintenant, les boules fermées $D(P_i,\delta)$ se plongent dans X, ce qui implique que l'image de H_δ par $\log_J$ est un sous-groupe ouvert borné de $C \otimes_K \mathrm{Lie}(J)$ et que le sous-groupe de torsion de H_δ est fini ; on en déduit que $T_p(J/H_\delta)$ est un réseau de $\widehat{J}$ et donc que $V_p(J/H_\delta) = \widehat{J}$, pour tout $\delta > 0$, et donc $\varinjlim_\delta V_p(J/H_\delta) = \widehat{J}$.

En passant à la limite dans la suite ci-dessus, on en déduit une suite exacte fonctorielle

$$C \longrightarrow \mathscr{O}(Y^\dagger) \xrightarrow{\exp} H^1_{\text{et}}(Y^\dagger, \mathbf{Q}_p(1))_0 \longrightarrow \widehat{J} \longrightarrow 0.$$

En comparant les suites exactes de la rem. 7.8 et du th. 7.6, on en déduit le résultat suivant qui admet une interprétation en termes d'intégration p-adique comme nous le verrons au n° 7.2.1 (cf. th. 7.12).

Théorème 7.9. — On a un isomorphisme naturel

$$\iota_{\text{st}} : \widehat{J} \cong (\mathbf{B}^+_{\text{st}} \otimes_{\check{C}} H^1_{\text{HK}}(X))^{N=0,\varphi=p}.$$

Remarque 7.10. — (i) Si, au lieu de J, on considère un groupe p-divisible $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{O}_C$, et qu'on définit le revêtement universel $\widehat{\mathscr{G}}$ de manière analogue, alors on a un isomorphisme naturel ([22, ch. 4] ou [44, sec. 5.1])

$$\widehat{\mathscr{G}} \cong (\mathbf{B}^+_{\text{cris}} \otimes_{\check{C}} D(\mathscr{G}))^{\varphi=p},$$

où $D(\mathscr{G})$ est le module de Dieudonné (covariant) de $\mathscr{G}$. On pourrait en déduire le th. 7.9 dans le cas où X a bonne réduction.

(ii) $H^1_{\mathrm{HK}}(X)$ est contravariant en X, mais est aussi isomorphe à $H^1_{\mathrm{HK}}(X)^*(-1)$, et c'est sous cette forme qu'il apparaît dans le th. 7.12 qui est la généralisation naturelle de l'énoncé pour les groupes p-divisibles.

Remarque 7.11. — Soient X propre et Y un affinoïde munis d'une triangulation S assez fine, et donc d'un patron. La filtration sur $H^1_{\mathrm{HK}}(X)$ ou $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}$ induit une filtration sur $\widehat{J}$. On note $H^1_{\mathrm{HK}}(X)_0$ et $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}_0$ les noyaux des flèches vers $H^1_c(\Gamma,\check{C})^*(-1)$; l'opérateur N est identiquement nul sur ces sous-groupes (ce qui explique que l'on peut utiliser $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ au lieu de B_{st} dans les énoncés ci-dessous).

(i) Si X est propre, notons $\mathscr{J}$ le modèle de Néron de J, $\mathscr{J}^0$ la composante connexe de 0, et J^{sp} la fibre spéciale de $\mathscr{J}^0$ (c'est une variété semi-abélienne, extension de $\prod_{s\in S} J(Y_s^{\mathrm{sp}})$ par $H^1(\Gamma,\mathbf{Z})\otimes \mathbf{G}_m$, qui s'identifie à $\mathrm{Pic}(X_S^{\mathrm{sp}})$). Le groupe $\widehat{J}$ vit dans une suite exacte

$$0\to V_p(\mathscr{J}^0(\mathscr{O}_C/p))\to \widehat{J}\to V_p(\pi_0(\mathscr{J}))\to 0,$$

où $\pi_0(\mathscr{J})$ est le groupe des composantes connexes (isomorphe à $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\otimes H^1(\Gamma,\mathbf{Z})^*$). On a de plus des isomorphismes

$$V_p(J^{\mathrm{sp}}(\mathscr{O}_C/p))\cong V_p(\mathscr{J}^0(\mathscr{O}_C/p))\cong (\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}\otimes_{\check{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(X)_0)^{\varphi=p},$$
$$V_p(\pi_0(\mathscr{J}))\cong H^1(\Gamma,\mathbf{Q}_p)^* = (\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}\otimes_{\check{C}} H^1(\Gamma,\check{C})^*(-1))^{\varphi=p}$$

(ii) Si Y est un affinoïde, reprenons les notations du (ii) de la rem. 6.22 décrivant le groupe $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}$. Rappelons que Y_S^{sp} est, par définition, la compactifiée de la fibre spéciale classique de Y_S ; cela fait que $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}_0$ est un quotient de $H^1_{\mathrm{cris}}(Y_S^{\mathrm{sp}})_0$, sous-groupe du groupe de cohomologie log-cristalline des éléments dont les résidus sont nuls en tous les points avec une structure logarithmique. On note $Y^{\mathrm{sp}}_{S,\mathrm{int}}$ la réunion des Y_s, pour $s\in S_{\mathrm{int}}$. Soient $J^{\mathrm{sp}} = \mathrm{Pic}(Y_S^{\mathrm{sp}})$ et $J^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{int}} = \mathrm{Pic}(Y^{\mathrm{sp}}_{S,\mathrm{int}})$. Alors J^{sp} et $J^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{int}}$ sont des variétés semi-abéliennes, et on dispose d'une flèche naturelle $J^{\mathrm{sp}}\to J^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{int}}$; on note $J^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{ext}}$ le noyau de ce morphisme. On a, comme ci-dessus, un isomorphisme

$$(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}\otimes_{\check{C}} H^1_{\mathrm{cris}}(Y_S^{\mathrm{sp}})_0)^{\varphi=p}\cong V_p(J^{\mathrm{sp}}(\mathscr{O}_C/p))$$

et un diagramme commutatif à lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & V_p(J^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{ext}}(\mathscr{O}_C/p)) & \to & (\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}\otimes_{\check{C}} H^1_{\mathrm{cris}}(Y_S^{\mathrm{sp}})_0)^{\varphi=p} & \to & V_p(J^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{int}}(\mathscr{O}_C/p)) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & V_p(J^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{ext}}(k_C)) & \to & (\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}\otimes_{\check{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y)^{\mathrm{sep}}_0)^{\varphi=p} & \to & V_p(J^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{int}}(\mathscr{O}_C/p)) & \to & 0
\end{array}$$

7.2. Comparaison avec l'intégration p-adique

Dans ce paragraphe, $C = \mathbf{C}_p$ et K est une extension finie [47] de $\mathbf{Q}_p$, X est une courbe propre et lisse définie sur K et J est sa jacobienne. On fixe $P_0 \in X(C)$ et on note $\iota : X \to J$ le plongement envoyant P sur la classe du diviseur $P - P_0$.

7.2.1. L'accouplement de périodes. — L'intégration p-adique induit des accouplements de périodes, G_K-équivariants :

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}} : H^1_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \widehat{J} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}, \quad \langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{C}_p} : H^1_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \widehat{J} \to \mathbf{C}_p,$$

et on a $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{C}_p} = \theta \circ \langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}}$.

Passer par l'extension universelle $\widetilde{J}$ de J permet d'en donner une définition particulièrement compacte (cf. [12, prop. B.2.2]). On dispose d'applications naturelles G_K-équivariantes (Lemme 12 ou § B.2 de [12]) :

$$\iota_{\mathbf{C}_p} : \widehat{J} \to \widetilde{J}(\mathbf{C}_p), \quad \iota_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}} : \widehat{J} \to \widetilde{J}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$$

définies de la manière suivante : si $x = (x_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \widehat{J}$, on choisit une suite bornée $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de relèvements des x_n dans $\widetilde{J}(\mathbf{C}_p)$ (resp. $\widetilde{J}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$), et on envoie x sur la limite de $p^n \cdot \hat{x}_n$, quand $n \to +\infty$, la multiplication par p^n étant celle sur $\widetilde{J}$. On a, bien évidemment,

$$\iota_{\mathbf{C}_p} = \theta \circ \iota_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}}.$$

Maintenant, si

$$\log_{\widetilde{J}} : \widetilde{J} \to H^1_{\mathrm{dR}}(J)^* = H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*$$

est le logarithme de $\widetilde{J}$ à valeurs dans son algèbre de Lie, et si $\eta \in H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ et $x \in \widehat{J}$, alors

$$\langle \eta, x\rangle_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}} = \langle \log_{\widetilde{J}} \circ \iota_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}}(x), \eta\rangle_{\mathrm{dR}} \quad \text{et} \quad \langle \eta, x\rangle_{\mathbf{C}_p} = \langle \log_{\widetilde{J}} \circ \iota_{\mathbf{C}_p}(x), \eta\rangle_{\mathrm{dR}}.$$

De plus, $\log_{\widetilde{J}} \circ \iota_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}} : \widehat{J} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*$ est injective (c'est une conséquence de la non dégénérescence de l'accouplement de périodes, cf. [12, th. II.3.5] par exemple).

Notons que $\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\check{\mathbf{C}}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(X_{\mathbf{C}_p})^*$ s'injecte dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*$.

Théorème 7.12. — (i) L'application $\log_{\widetilde{J}} \circ \iota_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}} : \widehat{J} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*$ se factorise à travers $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\check{\mathbf{C}}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(X)^*)^{N=0,\varphi=1}$.

(ii) Si on identifie $H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*$ à $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ grâce au cup-produit à valeurs dans $H^2_{\mathrm{dR}}(X) = K$, alors

$$(\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\check{\mathbf{C}}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(X)^*)^{N=0,\varphi=1} = (\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\check{\mathbf{C}}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(X))^{N=0,\varphi=p} \quad \text{et} \quad \log_{\widetilde{J}} \circ \iota_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}} = \iota_{\mathrm{st}}.$$

47. Cette restriction est due au fait que l'intégration p-adique [8, 12] est développée dans ce cadre. Mais les méthodes de [12] permettent d'étendre cette intégration sur une variété abélienne A, dans le cas général, au sous-groupe de $A(C)$ des x tels que $N!\,x$ tend vers 0 quand $N \to \infty$ (si $C = \mathbf{C}_p$, tout x vérifie cette condition). Cela suffirait pour étendre ce qui suit au cas où v_p est discrète sur K et C est le complété de sa clôture algébrique.

Remarque 7.13. — L'inclusion de $\log_{\widetilde{J}} \circ \iota_{\mathrm{B_{dR}}}(\widehat{J})$ dans $(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^{+} \otimes_{\check{\mathrm{C}}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(X)^*)^{N=0,\varphi=1}$ traduit le fait que la restriction de l'accouplement de périodes $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{B_{dR}}}$ à $H^1_{\mathrm{HK}}(X)$ est à valeurs dans $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^{+}$ et commute aux actions de φ et N sur $H^1_{\mathrm{HK}}(X)$ en plus de celle de G_K sur $\widehat{J}$ (cf. [11, 10] pour des résultats dans cette direction).

Démonstration. — Soit Y un affinoïde de X, complémentaire d'un nombre fini de boules ouvertes. On a un diagramme (le 0 en indice indique le sous-groupe des classes sans résidus le long des cercles fantômes à la frontière des boules enlevées) :

$$\begin{array}{ccccc} H^1_{\mathrm{proet}}(Y^{\dagger}_{\mathrm{C}_p}, \mathrm{Q}_p(1))_0 & \longrightarrow & \widehat{J} & \xrightarrow{\log_{\widetilde{J}} \circ \iota_{\mathrm{B_{dR}}}} & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_K H^1_{\mathrm{dR}}(X)^* \\ \downarrow & & & & \| \\ (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^{+} \otimes_{\check{\mathrm{C}}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(Y^{\dagger}_{\mathrm{C}_p})_0)^{N=0,\varphi=p} & \xrightarrow{1\otimes\iota_{\mathrm{HK}}} & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_K H^1_{\mathrm{dR}}(Y^{\dagger})_0 & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_K H^1_{\mathrm{dR}}(X) \end{array}$$

dans lequel les deux flèches partant de $H^1_{\mathrm{proet}}(Y^{\dagger}_{\mathrm{C}_p}, \mathrm{Q}_p(1))_0$ proviennent de la suite de Kummer (pour l'horizontale) et de la comparaison avec la cohomologie syntomique (pour la verticale), et ont même noyau. Il s'agit de prouver que le diagramme commute.

Il suffit donc de prouver que, si $v \in \widehat{J}$, et si $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est un relèvement de v dans $\mathrm{Symb}_p(Y_\delta)$, alors $\log_{\widetilde{J}}(\iota_{\mathrm{B_{dR}}}(v)) = \big(\pi_{\mathrm{dR}}(\frac{d\tilde{f}_n}{\tilde{f}_n})\big)_{n\in\mathrm{N}}$. On va prouver cet énoncé après application de θ (i.e. en remplaçant ι_{dR} par ι_{C_p}, ce qui évite de choisir des $\tilde{f}_n$), et indiquer les modifications à faire pour prouver le résultat pour ι_{dR}. Pour prouver l'énoncé avec ι_{C_p}, on va utiliser une fonction de Green du diviseur Θ pour construire un relèvement de v dans $\mathrm{Symb}_p(Y_\delta)$, avec $\delta > 0$ fixé.

7.2.2. Formes différentielles de troisième espèce. — Rappelons qu'une forme différentielle méromorphe sur X est dite :

- de première espèce si elle est holomorphe,
- de seconde espèce si les résidus en ses pôles sont tous nuls,
- de troisième espèce si elle n'a que des pôles simples et si les résidus en ces pôles sont des entiers.

Si ω est de troisième espèce, on note $\mathrm{Div}(\omega)$ son diviseur : $\mathrm{Div}(\omega) = \sum_x \mathrm{Res}_x\omega \cdot (x)$; il est de degré 0. Si $\omega = \frac{df}{f}$, alors $\mathrm{Div}(\omega) = \mathrm{Div}(f)$. Alors $\widetilde{J}$ est le quotient du groupe des formes de troisième espèce par celui des $\frac{df}{f}$; l'application naturelle $\pi_J : \widetilde{J} \to J$ est induite par $\omega \mapsto \mathrm{Div}(\omega)$, son noyau est l'espace $H^0(X, \Omega^1)$ des formes de première espèce. Enfin, le quotient de l'espace des formes de seconde espèce par celui des df est $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$.

Choisissons une base $\omega_1, \dots, \omega_g$ de $\Omega^1_{\mathrm{inv}}(J)$, et notons $\partial_1, \dots, \partial_g$ la base duale de l'espace des formes différentielles invariantes sur J (on a donc $df = \sum_{i=1}^{g} \partial_i f\ \omega_i$), et λ_i le logarithme de J solution de l'équation différentielle $d\lambda_i = \omega_i$.

Soit Θ le diviseur de J, image de X^{g-1} par $(Q_1,\dots,Q_{g-1}) \mapsto \ominus\iota(Q_1)\ominus\cdots\ominus\iota(Q_{g-1})$. Si $u \in J$ est général, l'intersection X_u de $\iota(X)$ et [48] $u \oplus \Theta$ est constituée des g points $Q_{u,1},\dots,Q_{u,g}$ solutions de l'équation $\iota(Q_{u,1})\oplus\cdots\oplus\iota(Q_{u,g}) = u$.

Soit G une fonction de Green de Θ (cf. n° 2 de [12, § II.2]). Si u est général,

$$\eta_{u,i} = \iota^*\big(d(\partial_i G(x\ominus u))\big)$$

est une forme différentielle de seconde espèce sur X, holomorphe en dehors de pôles doubles en les points de X_u, dont l'image η_i dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ ne dépend pas de u. De plus, $\iota^*\omega_1,\dots,\iota^*\omega_g,\eta_1,\dots,\eta_g$ forment une base de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$, ce qui nous fournit un scindage de la filtration de Hodge (cf. [12, prop. II.2.4]).

Si u est général, soit

$$\beta_u = \iota^*(dG(x\ominus u)).$$

Si u et v sont généraux, alors $\beta_u - \beta_v$ est une forme différentielle de troisième espèce dont le diviseur $\mathrm{Div}(\beta_u-\beta_v)$ est $X_u - X_v$. De plus, les $\beta_u-\beta_v$ engendrent un supplémentaire de $H^0(X,\Omega^1)$ dans l'espace des formes différentielles de troisième espèce [12, prop. II.2.9]. Toute forme β de troisième espèce peut donc s'écrire sous la forme $\beta = \beta^0 + \sum_u n_u\beta_u$, où $\beta^0 \in H^0(X,\Omega^1)$ est uniquement déterminée, $\sum_u n_n = 0$, et les u sont des points généraux de J tels que $\mathrm{Div}(\beta) = \sum n_u X_u$. On a alors (cf. [12, th. II.2.11]) :

$$\log_{\widetilde{J}}(\beta) = \beta^0 + \sum_u n_u \sum_{i=1}^g \lambda_i(u)\eta_i = \beta^0 + \sum_{i=1}^g \lambda_i(\mathrm{Div}(\beta))\eta_i.$$

Remarquons que G n'est unique qu'à addition près d'un polynôme de degré ≤ 2 en les λ_i. Il s'ensuit que, si β est donnée, on peut choisir G de telle sorte que $\beta^0 = 0$.

7.2.3. Fin de la preuve du th. 7.12. — Soit donc $v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \widehat{J}$. Le groupe $\widehat{J}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel ; on pose $\tilde{v}_n = \iota_{\mathbf{C}_p}(p^{-n}v)$, si $n \in \mathbf{Z}$. Alors $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de points de $\widetilde{J}$, et on a $\pi_J(\tilde{v}_n) = v_n$ pour tout n.

Soit $u \in J$ général, tel que $X_u \subset \cup_i D(P_i,1)^-$, et tel que $u\oplus v_n$ soit général pour tout n. Comme $v_n \to 0$ quand $n\to-\infty$, on a $X_{u\oplus v_{-n}} \subset \cup_i D(P_i,1)^-$, si $n \geq n_0$. Dans la suite, on suppose que l'on peut prendre $n_0 = 0$, et que $\lambda_i(v_0)$ est suffisamment petit pour que le reste du développement de Taylor de G en $x\ominus u$

$$G(x\ominus u\ominus p^n\cdot v_0) - G(x\ominus u) + \sum_{i=1}^g \partial_i G(x\ominus u)\lambda_i(v_n)$$

soit divisible par p^{2n+2} sur Y_δ, pour tout $n \in \mathbf{N}$ (c'est possible en remplaçant v par $p^N v$, ce qui ne fait que tout multiplier par p^N, grâce à [12, Lemme II.2.6] et au fait que $\lambda_i(v_n) = p^n\lambda_i(v_0)$.)

48. On note $\oplus$ l'addition sur J.

On note β_n la forme différentielle de troisième espèce, de diviseur $X_{u\oplus v_n} - X_u$, dont l'image dans $\widetilde{J}$ est $\tilde{v}_n$. On a alors

$$\beta_n = \beta_{u\oplus v_n} - \beta_u + \beta_n^0, \quad \text{avec } \beta_n^0 \in H^0(X, \Omega^1),$$

et donc

$$\log_{\tilde{J}}(\iota_{\mathbf{C}_p}(v)) = p^n \log_{\tilde{J}}(\beta_n) = p^n\big(\beta_n^0 + \sum_{i=1}^{g} \lambda_i(v_n)\eta_i\big), \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

Comme $p^n\lambda_i(v_n)$ ne dépend pas de n, il en est de même de $p^n\beta_n^0$ et, quitte à modifier G par un polynôme de degré ≤ 2 en les λ_i, on peut supposer que $\beta_n^0 = 0$ pour tout n.

Si $n \geq 0$, le diviseur $p^{2n}X_{u\oplus v_n} - X_{u\oplus v_{-n}} - (p^{2n}-1)X_u$ est principal, puisque $p^{2n}\cdot(u\oplus v_n)\ominus(u\oplus v_{-n})\ominus(p^{2n}-1)\cdot u = 0$. C'est donc le diviseur d'une fonction F_n, rationnelle sur X.

Lemme 7.14. — (i) Il existe $f_n \in \mathscr{O}(Y_\delta) - \{0\}$ telle que $f_n^{p^n} = F_n$.

(ii) $f_n \in A_{p,n}(Y_\delta)$, et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit un élément de $H^1_{\text{et}}(Y_\delta, \mathbf{Z}_p(1))$ dont l'image dans $\widehat{J}$ est v.

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} &p^{2n}X_{u\oplus v_n} - X_{u\oplus v_{-n}} - (p^{2n}-1)X_u \\ &\qquad = p^n(p^nX_{u\oplus v_n} - X_{u\oplus v_0} - (p^n-1)X_u) + (p^nX_{u\oplus v_0} - X_{u\oplus v_{-n}} - (p^n-1)X_u) \end{aligned}$$

Comme $p^nX_{u\oplus v_n} - X_{u\oplus v_0} - (p^n-1)X_u$ est principal, pour prouver le (i), il suffit de prouver que la fonction F_n', de diviseur $p^nX_{u\oplus v_0} - X_{u\oplus v_{-n}} - (p^n-1)X_u$, est une puissance p^n-ième sur Y_δ. Or on a

$$\log F_n' = p^n\big(G(x\ominus u\ominus v_0) - G(x\ominus u)\big) - \big(G(x\ominus u\ominus p^n\cdot v_0) - G(x\ominus u)\big),$$

et notre hypothèse sur le développement de Taylor de G en $x\ominus u$ implique que $\log F_n'$ est divisible par p^{n+1}, ce qui permet de démontrer le (i). De plus, le diviseur de f_n sur Y_δ est $p^nX_{u\oplus v_n}$, ce qui prouve que $f_n \in A_{p,n}(Y_\delta)$.

Le diviseur de F_{n+1}/F_n^p est

$$p^{2n+1}\big(pX_{u\oplus v_{n+1}} - X_{u\oplus p\cdot v_{n+1}} - (p-1)X_u\big) - (X_{u\oplus p^{n+1}v_0} - X_u) + p(X_{u\oplus p^n\cdot v_0} - X_u).$$

(On a utilisé les formules $p\cdot v_{n+1} = v_n$, $v_{-n-1} = p^{n+1}\cdot v_0$ et $v_{-n} = p^n\cdot v_0$.) Maintenant, $pX_{u\oplus v_{n+1}} - X_{u\oplus p\cdot v_{n+1}} - (p-1)X_u$ est principal et

$$G(x\ominus(u\oplus p^{n+1}v_0)) - G(x\ominus u) - p\big(G(x\ominus(u\oplus p^nv_0)) - G(x\ominus u)\big)$$

est divisible par p^{2n+3} sur Y_δ pour les mêmes raisons que ci-dessus. On en déduit que F_{n+1}/F_n^p est une puissance p^{2n+1}-ième sur Y_δ, et donc que f_{n+1}/f_n est une puissance p^n-ième. Il s'ensuit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit un élément de $H^1_{\text{et}}(Y_\delta, \mathbf{Z}_p(1))$.

Enfin, $p^{-n}\text{Div}(f_n) = X_{u\oplus v_n}$ a pour image $u\oplus v_n$ dans $\text{Pic}(Y_\delta)$, mais comme u est dans le sous-groupe H de J tel que $\text{Pic}(Y_\delta) = J/H$, cette image est aussi v_n, ce qui permet de conclure. □

Revenons à la démonstration du théorème. On a $\frac{df_n}{f_n} = p^n\beta_n - p^{-n}\beta_{-n}$, et comme

$$p^{-n}\beta_{-n} = p^{-n}\big(\iota^* dG(x \ominus u \ominus p^n \cdot v_0) - \iota^* dG(x \ominus u)\big) = -\sum_{i=1}^{g} \lambda_i(v_0)\eta_{u,i} \mod p^n,$$

on voit que $\frac{df_n}{f_n}$ tend vers $\sum_{i=1}^{g} \lambda_i(v_0)\eta_{u,i}$, et donc :

$$\mathrm{dlog}((f_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i(v_0)\eta_{u,i} \quad \text{et} \quad \pi_{\mathrm{dR}}\circ\mathrm{dlog}((f_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i(v_0)\eta_i = \log_{\tilde{J}}(\iota_{\mathbf{C}_p}(v)).$$

On en déduit la commutativité du diagramme dans le cas de $\iota_{\mathbf{C}_p}$.

Pour traiter le cas de $\iota_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}}$, on pose $\tilde{v}_{n,\mathrm{dR}} = \iota_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}}(p^{-n}v)$ et $v_{n,\mathrm{dR}} = \pi_J(\tilde{v}_{n,\mathrm{dR}})$ On a donc $\theta(\tilde{v}_{n,\mathrm{dR}}) = \tilde{v}_n$ et $\theta(v_{n,\mathrm{dR}}) = v_n$. Ensuite, on définit $\beta_{n,\mathrm{dR}}$ comme étant $\beta_{u\oplus v_{n,\mathrm{dR}}} - \beta_u$ en ayant choisi G pour que l'image de $\beta_{n,\mathrm{dR}}$ dans $\tilde{J}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ soit $\tilde{v}_{n,\mathrm{dR}}$. Alors

$$\log_{\tilde{J}}(\iota_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}}(v)) = p^n \sum_{i=1}^{g} \lambda_i(v_{n,\mathrm{dR}})\eta_i, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

On définit $F_{n,\mathrm{dR}}$ par $\mathrm{Div}(F_{n,\mathrm{dR}}) = p^{2n}X_{u\oplus v_{n,\mathrm{dR}}} - X_{u\oplus v_{-n,\mathrm{dR}}} - (p^{2n}-1)X_u$, et on prouve en reprenant la démonstration du lemme 7.14 que $F_{n,\mathrm{dR}} = f_{n,\mathrm{dR}}^{p^n}$ (alors $f_{n,\mathrm{dR}}$ est un relèvement de f_n). Enfin, le même calcul que ci-dessus montre que $\frac{df_{n,\mathrm{dR}}}{f_{n,\mathrm{dR}}}$ tend vers $\sum_{i=1}^{g} \lambda_i(v_{0,\mathrm{dR}})\eta_{u,i}$ et donc que son image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\dagger_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}})$ est $\sum_{i=1}^{g} \lambda_i(v_{0,\mathrm{dR}})\eta_i = \log_{\tilde{J}}(\iota_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}}(v))$, ce que l'on voulait. □

8. Cohomologie des courbes non propres, sans bord

Soit Y une courbe non propre, sans bord. Le th. 8.1 ci-dessous décrit la cohomologie proétale p-adique en termes du complexe de de Rham et de la cohomologie de Hyodo-Kato et, dans le cas où $C = \mathbf{C}_p$, le th. 8.12 compare la cohomologie de Hyodo-Kato et la cohomologie proétale ℓ-adique pour $\ell \neq p$. Dans le § 8.4, on explique un autre point de vue, utilisant la géométrie rigide comme dans [10], pour dévoiler les 🏋 structures cachées sur les courbes p-adiques 🏋.

8.1. Cohomologie proétale p-adique

Théorème 8.1. — Si Y est une courbe non propre, sans bord, on a le diagramme commutatif fonctoriel de fréchets suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(Y)/C \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+ \widehat{\otimes}_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y))^{N=0,\varphi=p} \arrow[r] \arrow[d, "\theta\otimes\iota_{\mathrm{HK}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(Y)/C \arrow[r, "d"] & \Omega^1(Y) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{dR}}(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes sont exactes et les flèches verticales sont d'image fermée.

Démonstration. — On peut écrire Y comme, au choix, une réunion croissante stricte d'affinoïdes Y_n ou d'affinoïdes surconvergents $Y_n^\dagger$. Le théorème se déduit donc, par passage à la limite projective du th. 6.32 ou du th. 7.6 (on a $\mathrm{R}^1\lim \mathscr{O}(Y_n) = 0$ d'après le théorème de Kiehl).

L'image de $\gamma : (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \mathbin{\widehat{\otimes}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y))^{N=0,\varphi=p} \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ est fermée car γ est la limite projective des $\gamma_n : (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \mathbin{\widehat{\otimes}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y_n^\dagger))^{N=0,\varphi=p} \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y_n^\dagger)$ dont les images sont fermées comme nous l'avons déjà vu. Il en résulte que $H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbf{Q}_p(1)) \to \Omega^1(Y)$ est d'image fermée. □

Remarque 8.2. — (i) En passant à la limite dans le (ii) du th. 6.14 ou dans le cor. 7.3, on prouve que $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ admet une filtration dont les quotients successifs sont :

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y) = \big[\ H^1(\Gamma, C) \text{ — } \textstyle\prod_{s\in\Sigma} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^\diamondsuit) \text{ — } H^1_c(\Gamma, C)^*\ \big],$$

où $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{an}}(Y)$ et $\Sigma = \Sigma(Y)$.

(ii) En passant à la limite dans le (ii) de la rem. 6.22 ou dans la prop. 7.4, on prouve que $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)$ admet une filtration stable par φ dont les quotients successifs sont :

$$H^1_{\mathrm{HK}}(Y) = \big[\ H^1(\Gamma, \breve{C}) \text{ — } \textstyle\prod_{s\in\Sigma} H^1_{\mathrm{cris}}(Y_s^{\mathrm{sp}}) \text{ — } H^1_c(\Gamma, \breve{C})^*\ (-1)\big].$$

L'opérateur de monodromie s'obtient par passage à la limite et est aussi celui obtenu via la rem. 1.6.

(iii) En passant à la limite dans le (i) du th. 6.21, on en déduit un isomorphisme

$$\iota_{\mathrm{HK}} : C \otimes_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(Y) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y).$$

8.2. Fibre spéciale d'une courbe sans bord

Soit Y une courbe sans bord. On va définir ce qui correspond 404 à la fibre spéciale du modèle semi-stable minimal de Y 404. Comme une courbe analytique n'a pas forcément de modèle semi-stable minimal, la définition qui suit est un peu ad hoc, mais a la vertu de fournir un objet sur lequel $\mathrm{Aut}_C Y$ agit (et même $\mathrm{Aut}_K Y$ si Y est définie sur K). L'idée est de partir de la fibre spéciale de n'importe quel modèle semi-stable de Y et de contracter tous les P^1 contractibles. Ce faisant, on peut tomber sur un point, ce qui demande de modifier un peu la notion de courbe marquée du n° 2.4.1.

8.2.1. Courbes marquées. — Soit X une courbe sur k_C (i.e. une réunion dénombrable, localement finie, de courbes irréductibles, ou bien un point ou un 404 point double 404). Si X n'est pas un point ou un point double, un point marqué sur X est un couple $(P, \mu(P))$, où $P \in X(k_C)$, et la multiplicité $\mu(P)$ de P est un élément de [49] $\mathrm{R}_+^* \sqcup \{\infty\}$.

Une courbe marquée (X, A) est une courbe X munie d'un ensemble A de points marqués. Une courbe marquée (X, A) est semi-stable si :

• X est à singularités nodales,

49. Comme nos courbes sont sans bord, leur fibre spéciale n'a pas de points de multiplicité 0^+.

• les composantes irréductibles de X sont propres et ne comportent qu'un nombre fini de points marqués,

• les points singuliers de X sont marqués et leur multiplicité appartient à $\mathbb{Q}_+^*$.

Elle est stable si elle est semi-stable et si, de plus, aucune composante connexe de X n'est un P^1 avec 0, 1 ou 2 points marqués.

8.2.2. Contractions de P^1. — A partir d'une courbe marquée (X, A) semi-stable, on fabrique une courbe marquée stable, en contractant tous les P^1 ayant 0, 1 ou 2 points marqués (comptés avec multiplicité) :

• Si un P^1 n'a pas de point marqué ou a un unique point marqué qui est lisse, c'est que la courbe est réduite à ce P^1, et quand on le contracte on obtient un point

• Si un P^1 a un unique point marqué qui est singulier, quand on contracte le P^1 le point marqué devient un point lisse (que l'on démarque) si ce point est le point d'intersection avec une autre composante irréductible ou bien le P^1 devient un point double si ce P^1 a de l'autointersection.

• Si un P^1 a deux points marqués P_1 et P_2, on marque le point Q obtenu en contractant le P^1 en posant [50] $\mu(Q) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$.

Remarque 8.3. — (i) Les règles précédentes sont dictées par ce qui se passe si on a deux triangulations S et S' d'une courbe analytique Y, telles que $S' = S \sqcup \{s_0\}$. On passe de la fibre spéciale de $Y_{S'}$ à celle de Y_S en contractant le P^1 correspondant à s_0 et il y a deux cas : soit s_0 est de valence 1 sur $\Gamma(S')$ et on obtient $\Gamma(S)$ à partir de $\Gamma(S')$ en retirant s_0 et l'arête qui part de s_0, soit s_0 est de valence 2, et on obtient $\Gamma(S)$ à partir de $\Gamma(S')$ en retirant s_0 et en fusionnant les deux arêtes partant de s_0 en une seule (dont la longueur est la somme des longueurs des deux arêtes). Il suffit alors de traduire ce qui précède en utilisant le fait que $\Gamma(S)$ et $\Gamma(S')$ sont les graphes duaux des fibres spéciales de Y_S et $Y_{S'}$ pour obtenir les règles ci-dessus.

(ii) Pour trianguler une couronne correspondant à une arête non relativement compacte de $\Gamma^{\mathrm{an}}(Y)$, il faut une infinité de sommets et dans l'opération ci-dessus il peut y avoir une infinité d'opérations à faire, ce qui demande de passer à la limite dans certaines multiplicités.

(iii) Une fois tous les P^1 contractés, on obtient une courbe stable ou un point (double, par convention, si le P^1 que l'on contracte a un point singulier).

8.2.3. Fibre spéciale. — Si Y est une courbe sans bord, on définit la fibre spéciale Y^{sp} de Y comme étant la courbe stable obtenue à partir de la fibre spéciale du modèle semi-stable associé à n'importe quelle triangulation S de Y. (Le résultat ne dépend pas de la triangulation car, deux triangulations S_1, S_2 étant données, on peut trouver une triangulation S_3 plus fine que S_1 et S_2, et les courbes stables obtenues à partir de S_1 et S_2 sont isomorphes à celle obtenue à partir de S_3.)

Les composantes irréductibles de Y^{sp} sont les Y_s^{sp}, pour $s \in \Sigma(Y)$. Si $\Sigma(Y) = \varnothing$, on est dans un des cas suivants :

50. Avec la convention $a + \infty = \infty$.

- Y n'est pas une courbe de Tate et Y^{sp} est un point.
- Y est une courbe de Tate et Y^{sp} est un point double.

8.2.4. Fonctorialité de la fibre spéciale. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme de courbes analytiques (non constant). Si S et T sont des triangulations de X et Y telles que $S \supset f^{-1}(T)$, et si X_S et Y_T sont les modèles semi-stables de X et Y associés à S et T, alors f se prolonge, de manière unique, en $f : X_S \to Y_T$; on note $f_0 : X_S^{\mathrm{sp}} \to Y_T^{\mathrm{sp}}$ le morphisme induit sur les fibres spéciales.

Théorème 8.4. — Si $f : X \to Y$ est une morphisme de courbes analytiques, il existe un unique morphisme de courbes $f^{\mathrm{sp}} : X^{\mathrm{sp}} \to Y^{\mathrm{sp}}$ tel que, pour toutes triangulations S et T de X et Y telles que $S \supset f^{-1}(T)$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_S^{\mathrm{sp}} & \xrightarrow{f_0} & Y_T^{\mathrm{sp}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\mathrm{sp}} & \xrightarrow{f^{\mathrm{sp}}} & Y^{\mathrm{sp}} \end{array}$$

(Les flèches verticales sont celles obtenues en contractant tous les P^1 contractibles.)

Démonstration. — Cela résulte de ce que l'image d'un P^1 privé d'un nombre N de points est un point ou bien un P^1 privé d'un nombre $\leq N$ de points : ceci implique que l'image d'un P^1 contractible sur X_S^{sp} est un point ou bien est contractible sur Y_T^{sp}. Il s'ensuit que, si S et T sont fixés, il existe $f_{S,T}^{\mathrm{sp}}$ unique faisant commuter le diagramme.

Pour montrer que $f_{S,T}^{\mathrm{sp}}$ ne dépend pas de S et T, il suffit, si S_1, S_2 et T_1, T_2 sont des triangulations de X et Y, de considérer une triangulation T_3 de X, plus fine que T_1 et T_2, et une triangulation S_3 plus fine que S_1, S_2 et $f^{-1}(T_3)$, et de constater que $f_{S_1,T_1}^{\mathrm{sp}} = f_{S_3,T_3}^{\mathrm{sp}} = f_{S_2,T_2}^{\mathrm{sp}}$. □

En appliquant le th. 8.4 à $Y = X$, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 8.5. — Le groupe $\mathrm{Aut}_C(Y)$ agit naturellement sur Y^{sp}.

8.2.5. Les groupes W_Y et WD_Y. — Soient K une extension finie de Q_p, $q = |k_K|$ et $C = \mathrm{C}_p$. Si Y est définie sur K, alors G_K agit sur $\mathrm{Aut}_C Y$ par conjugaison, et le groupe $\mathrm{Aut}_K Y$, qui agit naturellement sur Y^{sp}, est un produit : $\mathrm{Aut}_K Y = G_K \times (\mathrm{Aut}_C Y)^{G_K}$.

Le frobenius géométrique φ agit, lui aussi, sur Y^{sp} comme sur toute variété de caractéristique p. Il en résulte que le sous-semi-groupe $\mathrm{Aut}_K(Y) \times \varphi^{\mathrm{N}}$ de $\mathrm{Aut}_K(Y) \times \varphi^{\mathrm{Z}}$ agit sur Y^{sp}. Il agit donc aussi sur le corps k_C des constantes, et on note W_Y^+ le sous-semi-groupe de $\mathrm{Aut}_K(Y) \times \varphi^{\mathrm{N}}$ des éléments agissant trivialement sur k_C, et W_Y le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_K(Y) \times \varphi^{\mathrm{Z}}$ engendré par W_Y^+.

Remarque 8.6. — (i) Le groupe de Weil W_K de K est le sous-groupe de $G_K \times \varphi^{\mathrm{Z}}$ des (g, φ^n) agissant trivialement sur $k_C = \overline{\mathrm{F}}_p$. La projection $G_K \times \varphi^{\mathrm{Z}} \to \varphi^{\mathrm{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Z}$ définit une fonction degré $\deg : \mathrm{W}_K \to f\mathrm{Z}$, où $q = p^f$, et la projection $G_K \times \varphi^{\mathrm{Z}} \to G_K$ fournit une injection

$\iota : \mathrm{W}_K \hookrightarrow G_K$: un élément g de G_K est de la forme $\iota(\gamma)$, avec $\gamma \in \mathrm{W}_K$ si et seulement si il existe $n \in \mathrm{Z}$ tel que g agisse par $x \mapsto x^{p^n}$ sur $\overline{\mathrm{F}}_p$, et alors $\deg \gamma = -n$.

(ii) Par construction, on dispose d'applications naturelles

$$\deg : \mathrm{W}_Y \to \varphi^{\mathrm{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Z} \quad \text{et} \quad \iota : \mathrm{W}_Y \to \mathrm{Aut}_K(Y),$$

dont les restrictions à $\mathrm{W}_K \subset \mathrm{W}_Y$ sont les applications ci-dessus. On a $\mathrm{W}_Y = \mathrm{W}_K \times (\mathrm{Aut}_C Y)^{G_K}$, et comme W_K est dense dans G_K, on en déduit que W_Y est dense dans $\mathrm{Aut}_K Y$.

On note WD_Y le groupe algébrique produit semi-direct de G_a et W_Y, le produit étant donné par $(\lambda_1, g_1)(\lambda_2, g_2) = (\lambda_1 + p^{\deg g_1}\lambda_2, g_1 g_2)$, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{G}_a$ et $g_1, g_2 \in \mathrm{W}_Y$. Le sous-groupe de WD_Y engendré par W_K et G_a n'est autre que le groupe de Weil-Deligne WD_K de K.

Si L est un corps, une L-représentation de WD_Y est une représentation du groupe de ses L-points, et est équivalente à la donnée d'une L-représentation de W_Y et d'un opérateur N tel que $Ng = p^{\deg g} gN$. Une telle représentation est dite lisse si tout élément est fixé par un sous-groupe ouvert du groupe d'inertie I_K (naturellement un sous-groupe de $\mathrm{W}_K \subset \mathrm{W}_Y$).

Si L_1 et L_2 sont des corps et si V_1 et V_2 sont des représentations lisses de WD_Y sur L_1 et L_2, on dit que V_1 et V_2 sont similaires si elle deviennent isomorphes après extension des scalaires à un corps contenant L_1 et L_2.

8.2.6. Lissité de l'action de $\mathrm{Aut}_K(Y)$. — On suppose $\Sigma(Y) \neq \varnothing$.

Théorème 8.7. — Si $g \in \mathrm{Aut}_C(Y)$ agit trivialement sur Y^{sp}, alors g agit trivialement sur $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$.

Démonstration. — On utilise la description de la rem. 8.2. Comme $\Sigma(Y) \neq \varnothing$, le graphe $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{an}}(X)$ est le graphe dual de Y^{sp} ; il est donc fixe par g, puisque g agit trivialement sur Y^{sp}. Comme g fixe Γ, il agit trivialement sur $H^1(\Gamma, C)$ et sur $H^1_c(\Gamma, C)^*$, et il suffit donc de prouver qu'il agit trivialement sur $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_s^{\lozenge})$, si $s \in \Sigma$. Autrement dit, on est ramené au cas où Y est propre et a bonne réduction.

On peut recouvrir Y^{sp} par des ouverts U_i étales au-dessus de la droite affine (et donc munis de $z_i \in \mathscr{O}(U_i)$ tel que dz_i ne s'annule pas sur U_i), et utiliser le recouvrement de Y par les tubes $]U_i[$ des U_i pour calculer $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$. Cela permet de se ramener au cas d'un affinoïde X muni de $z \in \mathscr{O}^+(X)$ tel que $\partial = \frac{d}{dz}$ soit une dérivation de $\mathscr{O}^+(X)$ (pour globaliser, on a aussi besoin de savoir que $H^1(Y, C) = 0$, ce qui suit de ce que toutes les intersections des $]U_i[$ sont non vides et donc que le nerf du recouvrement est un simplexe). L'hypothèse selon laquelle g fixe la fibre spéciale implique qu'il existe $r > 0$ tel que $g^*z - z \in p^r \mathscr{O}^+(X)$. Il s'ensuit que, si $\omega \in \Omega^1(X)$, alors $g^*\omega - \omega$ est la différentielle de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \partial^{n-1}(\frac{\omega}{dz})(g^*z - z)^n$, et la série converge dans $\mathscr{O}(X)$ car, si $p^N \frac{\omega}{dz} \in \mathscr{O}^+(X)$, alors $p^N \frac{1}{n!} \partial^{n-1}(\frac{\omega}{dz}) \in \frac{1}{n}\mathscr{O}^+(X)$ (pour prouver ceci, il suffit de vérifier que c'est vrai en restriction à toute boule résiduelle, i.e. au tube $]P[$ d'un point P de la fibre spéciale, et cela suit de ce que $z - z(P_0)$ est un paramètre local de $]P[$ pour tout choix de $P_0 \in]P[$). Ceci prouve que g agit trivialement sur $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ et permet de conclure. □

Remarque 8.8. — Si $\Sigma(Y) = \varnothing$ et si Y n'est pas une courbe de Tate, $H^1_{\mathrm{dR}}(Y) = 0$ et le résultat est encore vrai. Si Y est une courbe de Tate, il faut convenir que la multiplication par -1 n'agit pas trivialement sur le point double Y^{sp} si on veut que le résultat reste valable.

8.3. Cohomologie (pro)étale ℓ-adique

Soit Y une courbe sans bord et soit $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{an}}(Y)$. On peut écrire Y comme la réunion croissante d'affinoïdes Y_n. Alors $H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) = \varprojlim_n H^1_{\mathrm{et}}(Y_n, \mathbf{Q}_\ell(1))$ (on a $H^1_{\mathrm{proet}}(Y_n, \mathbf{Q}_\ell(1)) = H^1_{\mathrm{et}}(Y_n, \mathbf{Q}_\ell(1))$ puisque Y_n est un affinoïde); la limite ne dépend pas du choix des Y_n car deux tels systèmes sont cofinaux. Comme les $H^1_{\mathrm{et}}(Y_n, \mathbf{Q}_\ell(1))$ sont des banachs, $H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est naturellement un fréchet.

Théorème 8.9. — Si $\ell \neq p$, le groupe $H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$ admet une filtration naturelle dont les quotients successifs sont donnés par :

$$H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) = \big[\ H^1(\Gamma, \mathbf{Q}_\ell)(1) \text{ — } \textstyle\prod_{s\in\Sigma(Y)} H^1_{\mathrm{et}}(Y_s, \mathbf{Q}_\ell(1))_0 \text{ — } H^1_c(\Gamma, \mathbf{Q}_\ell)^*\ \big].$$

Démonstration. — C'est un résultat classique [20, 5.2.5] ou [19]; il se déduit du th. 6.3 par passage à la limite. □

8.3.1. De la fibre spéciale à la fibre générique

On suppose que Y est définie sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, et donc $H^1_{\mathrm{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est muni d'une action de $\mathrm{Aut}_K Y$.

◇ L'action de WD_Y sur $H^1_{\mathrm{proet}}(Y^{\mathrm{sp}}, \mathbf{Q}_\ell(1))$, $\ell \neq p$. — La fibre spéciale Y^{sp} de Y est munie d'une action de W_Y et donc sa cohomologie (log)proétale ℓ-adique aussi. En tant que $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel, on a

$$H^1_{\mathrm{proet}}(Y^{\mathrm{sp}}, \mathbf{Q}_\ell(1)) = H^1(\Gamma, \mathbf{Q}_\ell)(1) \oplus \prod_{s\in\Sigma(Y)} H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{sp}}_s, \mathbf{Q}_\ell(1)) \oplus H^1_c(\Gamma, \mathbf{Q}_\ell)^*,$$

cette décomposition étant la décomposition par les poids de frobenius. L'action de W_Y respecte chacun des trois espaces ci-dessus : W_Y agit sur Y^{sp} et donc aussi sur Γ et, par suite sur $H^1_c(\Gamma, \mathbf{Q}_\ell)^*$ et $H^1(\Gamma, \mathbf{Q}_\ell)$ (cette action est d'ailleurs obtenue par extension des scalaires d'une action sur $H^1_c(\Gamma, \mathbf{Q})^*$ et $H^1(\Gamma, \mathbf{Q})$). L'action sur $\prod_{s\in\Sigma(Y)} H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{sp}}_s, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est un produit d'induites : si S est un système de représentants de $\Sigma(Y)$ modulo l'action de W_Y, et si W_s est le stabilisateur de $s \in S$ dans W_Y, alors

$$\prod_{s\in\Sigma(Y)} H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{sp}}_s, \mathbf{Q}_\ell(1)) = \prod_{s\in S} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}_s}^{\mathrm{W}_Y} H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{sp}}_s, \mathbf{Q}_\ell(1))\big).$$

On peut naturellement enrichir cette action de W_Y en une action de WD_Y en définissant N par la recette habituelle (rem. 1.6).

◇ La recette de Fontaine. — La description ci-dessus, combinée avec le th. 8.9, montre, en utilisant le fait que

$$H^1_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{sp}}_s, \mathbf{Q}_\ell(1)) \cong H^1_{\mathrm{et}}(Y_s, \mathbf{Q}_\ell(1))_0,$$

que $H^1_{\text{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) \cong H^1_{\text{proet}}(Y^{\text{sp}}, \mathbf{Q}_\ell(1))$ en tant que $\mathbf{Q}_\ell$-espaces. Mais on a bien mieux : les actions de $\text{Aut}_K Y$ et WD_Y sur $H^1_{\text{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$ et $H^1_{\text{proet}}(Y^{\text{sp}}, \mathbf{Q}_\ell(1))$ se déduisent l'une de l'autre (th. 8.11 ci-dessous). Rappelons que, si V est une $\mathbf{Q}_\ell$-représentation de $\text{Aut}_K Y$, on peut lui associer une représentation $\text{WD}(V)$ de WD_Y par la recette suivante (de Fontaine [23]).

- On choisit des systèmes $(\zeta_{\ell^n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(p^{1/\ell^n})_{n\in\mathbf{N}}$ de racines ℓ^n-ièmes de 1 et p.
- On note :
  - $\diamond\ \chi_\ell : G_K \to \mathbf{Z}_\ell^*$ le caractère cyclotomique : $g(\zeta_{\ell^n}) = \zeta_{\ell^n}^{\chi_\ell(g)}$, si $n \in \mathbf{N}$,
  - $\diamond\ c_\ell : G_K \to \mathbf{Z}_\ell$ le cocycle de Kummer associé à p : $g(p^{1/\ell^n})/p^{1/\ell^n} = \zeta_{\ell^n}^{c_\ell(g)}$.
- On fait agir $\text{Aut}_K Y$ sur $\mathbf{Q}_\ell[u]$ à travers son quotient G_K qui agit par

$$g(u) = \chi_\ell^{-1}(g)(u + c_\ell(g)),$$

et on munit $\mathbf{Q}_\ell[u]$ de l'action triviale [51] de φ et de la dérivation $N = \frac{d}{du}$. On a $N \circ g = \chi_\ell(g)^{-1} g \circ N$, si $g \in \text{Aut}_K Y$ (et donc $N \circ g = p^{\deg g} g \circ N$, si $g \in \text{W}_Y$).

- On pose alors

$$\text{WD}(V) = \varinjlim_{[L:K]<\infty} (\mathbf{Q}_\ell[u] \otimes V)^{I_L}.$$

C'est une représentation de $\text{Aut}_K Y$ (agissant diagonalement) munie d'actions de φ (triviale) et N via leurs actions sur le premier facteur. En restreignant l'action de $\text{Aut}_K Y \times \varphi^{\mathbf{Z}}$ à W_Y cela fournit une $\mathbf{Q}_\ell$-représentation de W_Y (car $N \circ g = p^{\deg g} g \circ N$ sur $\mathbf{Q}_\ell[u]$, si $g \in \text{W}_Y$), qui est lisse par construction.

Si V est une limite projective $\varprojlim_n V_n$ de représentations de dimension finie V_n, on pose $\text{WD}(V) = \varprojlim_n \text{WD}(V_n)$.

Remarque 8.10. — Dans les deux cas, on retrouve V (ou plutôt sa restriction au sous-groupe dense W_Y de $\text{Aut}_K Y$) à partir de $\text{WD}(V)$ par la formule

$$V = (\mathbf{Q}_\ell[u] \mathbin{\widehat{\otimes}} \text{WD}(V))^{N=0};$$

il est donc équivalent de se donner V ou $\text{WD}(V)$.

Théorème 8.11. — Si $\ell \neq p$, on a une identification de WD_Y-représentations :

$$\text{WD}(H^1_{\text{proet}}(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))) = H^1_{\text{proet}}(Y^{\text{sp}}, \mathbf{Q}_\ell(1)).$$

Démonstration. — Cela suit, par passage à la limite, de ce que $H^1_{\text{proet}}(Y_s, \mathbf{Q}_\ell(1))_0 = H^1_{\text{et}}(Y_s^{\text{sp}}, \mathbf{Q}_\ell(1))$ (on est dans le cas de bonne réduction) en tant que représentation de W_s, et de la formule 404 de Picard-Lefschetz 404 (rem. 6.5). □

51. L'action de φ est triviale sur la cohomologie étale ℓ-adique car c'est l'identité sur les espaces topologiques. Il n'en sera pas de même pour la cohomologie de Hyodo-Kato.

8.3.2. Comparaison entre les cohomologies étales p-adique et ℓ-adique. — On suppose encore que Y est définie sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$.

Théorème 8.12. — Les représentations de WD_Y sur $H^1_{\mathrm{proet}}(Y^{\mathrm{sp}}, \mathbf{Q}_\ell(1))$, pour $\ell \neq p$, et sur $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)(1)$, sont similaires.

Démonstration. — La filtration de la rem. 8.2 pour $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)$ admet un scindage naturel par les poids comme $H^1_{\mathrm{proet}}(Y^{\mathrm{sp}}, \mathbf{Q}_\ell)$, et ce scindage est stable par W_Y. Il suffit donc de prouver que chacun des termes fournit des représentations similaires de W_Y et que les opérateurs de monodromie sont les mêmes.

Sur les parties de la cohomologie ne dépendant que du graphe, c'est clair puisqu'elles sont obtenues, par extension des scalaires, à partir d'une même Q-représentation. En particulier, les deux opérateurs de monodromie sont les mêmes.

Il reste à vérifier que l'action de W_Y est la même des deux côtés sur le reste. Pour cela, choisissons un système $(Y_s^{\mathrm{sp}})_{s\in S}$ de représentants de composantes irréductibles de Y^{sp} modulo l'action de W_Y (notons que W_Y agit sur les composantes puisque φ les laisse stables). Si $s \in S$, on note W_s le stabilisateur de Y_s^{sp}. Alors l'action de W_s sur $H^1_{\mathrm{et}}(Y_s^{\mathrm{sp}}, \mathbf{Q}_\ell)$ et $H^1_{\mathrm{cris}}(Y_s^{\mathrm{sp}})$ se factorise à travers $\mathrm{End}(J_s)$, où J_s est la jacobienne de Y_s^{sp}, et on conclut en utilisant le fait que $H^1_{\mathrm{et}}(Y_s^{\mathrm{sp}}, \mathbf{Q}_\ell)$ et $H^1_{\mathrm{cris}}(Y_s^{\mathrm{sp}})$ sont similaires en tant que représentations de $\mathrm{End}(J_s)$. □

8.4. Une décomposition de la cohomologie de de Rham

Dans tout le reste de ce chapitre, on suppose que $C = \mathbf{C}_p$. Cela permet d'utiliser l'intégration sur les courbes ([8, 9]) qui repose sur le fait qu'une puissance de frobenius devient linéaire, ou [12] qui repose sur le fait que $J(C)/H$ est de torsion si J est la jacobienne d'une courbe et H est un sous-groupe ouvert de $J(C)$).

Le but de ce § est de faire le lien avec le point de vue de [10] pour la définition des groupes de cohomologie de Hyodo-Kato. Nous allons définir des sous-groupes $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{int}}$, $H^1_{\mathrm{an}}(Y, \mathbf{C}_p)$, $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}}$ de $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ (les deux premiers ne dépendent de rien mais le troisième dépend du choix d'une branche du logarithme ou, ce qui revient au même, de $\mathscr{L} = \log p \in \mathbf{C}_p$) et de prouver le résultat suivant.

Théorème 8.13. — Si Y est une courbe analytique connexe sans bord, on a une décomposition fonctorielle

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y) = H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{int}} \bigoplus H^1_{\mathrm{an}}(Y, \mathbf{C}_p) \bigoplus H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}},$$

et des isomorphismes fonctoriels

$$H^1_{\mathrm{an}}(Y, \mathbf{C}_p) = H^1(\Gamma^{\mathrm{an}}(Y), \mathbf{C}_p) \quad H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}} = H^1_c(\Gamma^{\mathrm{an}}(Y), \mathbf{C}_p)^*$$

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{int}} \cong \prod_{s\in\Sigma(Y)} H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp}}/\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}).$$

Remarque 8.14. — (i) On peut écrire un affinoïde surconvergent comme une limite projective de wide opens pour lesquels le th. 8.13 s'applique. On en déduit un scindage (dépendant de $\mathscr{L}$) de la filtration du (ii) du cor. 7.3.

(ii) La dépendance de ce scindage par rapport au choix de $\mathscr{L}$ fait intervenir l'opérateur de monodromie N sur $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ (cf. prop. 8.18).

8.4.1. Découpage associé à une pseudo-triangulation. — Soient S une pseudo-triangulation fine de Y, et A l'ensembles des arêtes de $\Gamma = \Gamma(S)$. On fixe une orientation de Γ. A partir de S, on fabrique un découpage de Y en couronnes analytiques (fibres génériques rigides de jambes) et affinoïdes avec bonne réduction (fibres génériques rigides de shorts). On pourrait reconstituer Y en recollant ces morceaux le long de cercles fantômes analytiques – encore appelées couronnes d'épaisseur nulle, l'anneau des fonctions analytiques sur un tel objet est l'anneau de Robba $\varinjlim_{r>0}(\varprojlim_{s\in]0,r]}\mathscr{O}(\{s\leq v_p(z)\leq r\}))$ – mais on va plutôt recouvrir Y par des pantalons [52] se recollant le long de couronnes ouvertes.

Si $a\in A$, notons Y_a la couronne (i.e. la fibre générique d'une jambe) correspondant à a et, si $s\in S$, notons Y_s l'affinoïde correspondant à s, et Z_s le sous-espace analytique correspondant à l'étoile de sommet s ; on a donc $Z_s\setminus Y_s = \sqcup_{a\in A(s)}Y_a$. Alors Z_s est un pantalon, et $Z_s = Y_s\sqcup(\sqcup_{a\in A(s)}Y_a)$ est son découpage en (fibre génériques rigides de) short et jambes. Les Z_s forment un recouvrement de Y, et comme S est supposée fine :

- $Z_{s_1}\cap Z_{s_2}$ est vide ou est une couronne ouverte Y_a, avec $a\in A_c$, si $s_1\neq s_2$,
- $Z_{s_1}\cap Z_{s_2}\cap Z_{s_3}=\varnothing$ si s_1,s_2,s_3 sont deux à deux distincts.

On peut utiliser ce recouvrement pour calculer la cohomologie de de Rham de Y à la Čech. Un 1-cocycle est une collection

$$\big((\omega_s)_{s\in S},(f_a)_{a\in A_c}\big),\quad \text{avec } \omega_s\in\Omega^1(Z_s),\ f_a\in\mathscr{O}(Y_a),\text{ et } df_a=\omega_{s_2(a)}-\omega_{s_1(a)},$$

pour tous $s\in S$ et $a\in A_c$. Un 1-cobord est un 1-cocycle de la forme

$$\big((dF_s)_{s\in S},(F_{s_2(a)}-F_{s_1(a)})_{a\in A_c}\big),\quad \text{avec } F_s\in\mathscr{O}(Z_s),$$

pour tout $s\in S$, et $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ est le quotient du groupe $Z^1_{\mathrm{dR}}(S)$ des 1-cocycles par celui $B^1_{\mathrm{dR}}(S)$ des 1-cobords.

Cette description de $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ permet d'introduire un certain nombre de sous-groupes naturels.

8.4.2. Résidus. — Si D est un disque ouvert, $H^1_{\mathrm{dR}}(D)=0$, et si Y est une couronne ouverte généralisée $\{\alpha<v_p(z)<\beta\}$, alors $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ est un $\mathbf{C}_p$-espace de dimension 1, engendré par la classe de $\frac{dz}{z}$. En particulier, si $a\in A$, $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_a)$ est un $\mathbf{C}_p$-espace vectoriel de dimension 1 muni d'une base naturelle (au signe près ; le signe est déterminé par l'orientation de a). Si $\omega\in\Omega^1(Y_a)$, on définit le résidu $\mathrm{Res}_a\omega$ de ω comme la coordonnée de l'image de ω dans cette base de $H^1_{\mathrm{dR}}(Y_a)$.

Si $s\in S$, et si $a\in A(s)$, on définit le résidu $\mathrm{Res}(\omega,a)$ de $\omega\in\Omega^1(Z_s)$ en a comme celui de sa restriction à Y_a. La fonction $\mathrm{Res}(\omega):A(s)\to\mathbf{C}_p$ ainsi définie est dans le noyau de $\partial_s^*:\mathbf{C}_p^{A(s)}\to\mathbf{C}_p^{\{s\}}$. Plus précisément, si on compactifie Z_s en une courbe propre $\overline{Z}_s$ en

52. Un « basic wide open » dans la terminologie de Coleman, i.e. le complémentaire d'un nombre fini de boules fermées dans une courbe propre ayant bonne réduction.

recollant des boules ouvertes D_a le long des couronnes Y_a, pour $a \in A(s)$, alors Z_s et les D_a forment un recouvrement de $\overline{Z}_s$, ce qui fournit le diagramme commutatif, à lignes exactes, suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Omega^1(Z_s) \bigoplus \big(\bigoplus\limits_{a\in A(s)} \Omega^1(D_a)\big) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{a\in A(s)} \Omega^1(Y_a) & \longrightarrow & H^1(\overline{Z}_s, \Omega^1) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \wr} & & \\
H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \mathbf{C}_p^{A(s)} & \xrightarrow{\partial_s^*} & \mathbf{C}_p^{\{s\}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

8.4.3. Formes localement log-exactes. — Une forme différentielle $\omega \in \Omega^1(Z_s)$ est log-exacte si on peut l'écrire sous la forme $df_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$, avec $f_0 \in \mathscr{O}(Z_s)$ et $f_i \in \mathscr{O}(Z_s)^*$, si $1 \leq i \leq r$. Elle est Q-log-exacte si elle est log-exacte et si on peut prendre les λ_i rationnels dans la décomposition ci-dessus (ce qui équivaut à ce que $\mathrm{Res}_a\omega \in \mathbf{Q}$, pour tout $a \in A(s)$). On note $\Omega^1_{\log}(Z_s)$ le sous-espace de $\Omega^1(Z_s)$ des formes log-exactes, et $H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\log}$ l'image de $\Omega^1_{\log}(Z_s)$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)$. On a alors un isomorphisme

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\log} \cong \mathrm{Ker}\big[\partial_s^* : \mathbf{C}_p^{A(s)} \to \mathbf{C}_p^{\{s\}}\big]$$

découlant du lemme. 8.15 ci-dessous.

Lemme 8.15. — Si $\phi \in \mathrm{Ker}\big(\partial_s^* : \mathbf{Z}^{A(s)} \to \mathbf{Z}^{\{s\}}\big)$, il existe $M \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathscr{O}(Z_s)^*$ tels que $\mathrm{Res}(\frac{df}{f}) = M\phi$.

Démonstration. — On peut compactifier Z_s en une courbe propre $Z_s^\Diamond$ en recollant des boules ouvertes D_a le long des Y_a via le choix d'un paramètre local T_a de Y_a, de telle sorte que $D_a = \{v_p(T_a) > 0\}$ et $Y_a = \{\mu(a) > v_p(T_a) > 0\}$; on note P_a le centre de D_a.

Soit J la jacobienne de $Z_s^\Diamond$. Choisissons $a_0 \in A$, et notons P_{a_0} le centre du disque D_{a_0} et $\iota : Z_s^\Diamond \to J$ l'application $P \mapsto (P - P_{a_0})$. Le sous groupe H de $J(\mathbf{C}_p)$ engendré par $\iota(D'_{a_0})$, où $D'_{a_0} = D_{a_0} \setminus Y_{a_0}$, est ouvert ; on en déduit, car $J(\overline{\mathbf{F}}_p)$ est de torsion, que $J(\mathbf{C}_p)/H$ est de torsion. Il existe donc $M \in \mathbf{N}$ et des $Q_j \in D'_{a_0}$ tels que $M\big(\sum_{a\in A} \phi(a)\iota(P_a)\big) + \sum_j \pm\iota(Q_j) = 0$. Mais alors $M\big(\sum_{a\in A} \phi(a)(P_a - P_{a_0})\big) + \sum_j \pm(Q_j - P_{a_0})$ est un diviseur principal et la fonction $f \in \mathbf{C}_p(Z_s^\Diamond)^*$ dont c'est le diviseur a les propriétés voulues. □

Un 1-cocycle $\big((\omega_s)_{s\in S}, (f_a)_{a\in A_c}\big) \in Z^1_{\mathrm{dR}}(S)$ est localement log-exact si $\omega_s \in \Omega^1_{\log}(Z_s)$ pour tout $s \in S$. Il est globalement log-exact s'il existe $f \in \mathscr{O}(Y)^*$ tel que $\omega_s = \frac{df}{f}$ pour tout $s \in S$, et $f_a = 0$ pour tout $a \in A_c$. On note $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log}$ l'image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ des 1-cocycles localement log-exacts.

8.4.4. Cohomologie analytique. — $\mathrm{Coker}\big[\partial : \mathbf{C}_p^S \to \mathbf{C}_p^{A_c}\big]$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log}$: si $\phi \in \mathbf{C}_p^{A_c}$, on peut lui associer le 1-cocycle $((\omega_s)_{s\in S}, (f_a)_{a\in A_c})$, avec $\omega_s = 0$ et $f_a = \phi(a)$, qui est trivialement localement log-exact ; ce cocycle est un cobord si et seulement si ϕ est dans l'image de ∂. Plus conceptuellement, si on note $H^1_{\mathrm{an}}(Y, \mathbf{C}_p)$ le groupe de cohomologie analytique, on a

$$\mathrm{Coker}\big[\partial : \mathbf{C}_p^S \to \mathbf{C}_p^{A_c}\big] = H^1(\Gamma, \mathbf{C}_p) = H^1_{\mathrm{an}}(Y, \mathbf{C}_p).$$

Si $\omega \in H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$, on note $\mathrm{Res}(\omega) \in \mathbf{C}_p^A$ la fonction $a \mapsto \mathrm{Res}(\omega, a)$, où $\mathrm{Res}(\omega, a)$ est le résidu de la restriction de ω à Y_a. On a

$$\mathrm{Res}(\omega) \in \mathrm{Ker}\left[\partial^* : \mathbf{C}_p^A \to \mathbf{C}_p^S\right] = H^1_c(\Gamma, \mathbf{C}_p)^*,$$

et Res induit une suite exacte

$$0 \to H^1(\Gamma, \mathbf{C}_p) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log} \to H^1_c(\Gamma, \mathbf{C}_p)^*.$$

8.4.5. $\log_{\mathscr{L}}$-cobords. — Choisissons une branche $\log_{\mathscr{L}}$ du logarithme ($\log_{\mathscr{L}}$ est la branche du logarithme définie par $\log_{\mathscr{L}} p = \mathscr{L}$). Un 1-cocycle localement log-exact est un $\log_{\mathscr{L}}$-cobord s'il existe F_s, pour $s \in S$, de la forme $F_s = f_{s,0} + \sum_{i=1}^r \lambda_i \log_{\mathscr{L}} f_{s,i}$, avec $f_{s,0} \in \mathscr{O}(Z_s)$, $f_{s,i} \in \mathscr{O}(Z_s)^*$ si $1 \leq i \leq r$, telles que l'on ait $\omega_s = dF_s$ et $f_a = F_{s_2(a)} - F_{s_1(a)}$ pour tous $s \in S$ et $a \in A_c$. On note $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}}$ le sous-espace de $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log}$ engendré par les $\log_{\mathscr{L}}$-cobords.

Proposition 8.16. — Res induit un isomorphisme

$$\mathrm{Res} : H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\, \partial^* = H^1_c(\Gamma, \mathbf{C}_p)^*.$$

Démonstration. — Il résulte du lemme 8.15 que l'on peut trouver ω_s de la forme $\sum_i \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$, avec $f_i \in \mathscr{O}(Z_s)^*$ dont le résidu est $\phi_{|A(s)}$. On obtient un $\log_{\mathscr{L}}$-cobord dont la restriction du résidu à $A \setminus A_c$ est ϕ en faisant la somme des $(\omega_s, (F_{s,a})_{a \in A_c(s)})$ où, si $a \in A_c(s)$, $F_{s,a}$ est la restriction à Y_a de $\pm \sum_i \lambda_i \log_{\mathscr{L}} f_i$ suivant que $s_2(a) = s$ ou $s_1(a) = s$: cela marche car $F_{s_2(a),a} - F_{s_1(a),a} \in \mathscr{O}(Y_a)$ bien que ni $F_{s_2(a),a}$ ni $F_{s_1(a),a}$ ne soient holomorphes sur Y_a a priori. □

8.4.6. Formule ☙ de Picard-Lefschetz ❧

Remarque 8.17. — (i) La prop. 8.16 prouve que $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log} \to H^1_c(\Gamma, \mathbf{C}_p)^*$ est surjective et fournit un scindage (dépendant de $\mathscr{L}$) de la suite exacte

$$0 \to H^1(\Gamma, \mathbf{C}_p) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log} \to H^1_c(\Gamma, \mathbf{C}_p)^* \to 0.$$

(ii) L'application $\alpha_{\mathscr{L}} : H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log} \to H^1(\Gamma, \mathbf{C}_p)$ qui se déduit de ce scindage est la suivante. Soit $((\omega_s)_{s \in S}, (f_a)_{a \in A_c})$ un 1-cocycle localement log-exact. Il existe une primitive F_s de ω_s sur Z_s de la forme $f_0 + \sum_i \lambda_i \log_{\mathscr{L}} f_i$, avec $f_i \in \mathscr{O}(Z_s)^*$ (bien définie à addition d'une constante près). Si $a \in A_c$, alors $c_a = f_a - (F_{s_2(a)} - F_{s_1(a)})$ est une constante, et $(c_a)_{a \in A_c}$ définit un élément de $H^1(\Gamma, \mathbf{C}_p) = \mathrm{Coker}\, \partial$, ce qui fournit une application

$$\alpha_{\mathscr{L}} : H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log} \to H^1(\Gamma, \mathbf{C}_p)$$

qui est l'identité sur $H^1(\Gamma, \mathbf{C}_p)$ de manière évidente.

Proposition 8.18. — (i) Si $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 \in \mathbf{C}_p$, alors

$$\alpha_{\mathscr{L}_2}(\omega) = \alpha_{\mathscr{L}_1}(\omega) - (\mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_1)\, N_\mu(\mathrm{Res}(\omega)).$$

(ii) Si $f \in \mathscr{O}(Y)^*$, alors $N_\mu(\mathrm{Res}(\frac{df}{f})) = 0$.

Démonstration. — Soit $a \in A_c$. On peut trouver des fonctions $x_{a,i}$, pour $i = 1, 2$, méromorphes sur $Y_{s_i(a)}$, holomorphes sur Y_a, telles que $v_{Z_{s_i(a)}}(x_{a,i}) = 0$, et $x_{a,1}x_{a,2} = \alpha_a$, avec $v_p(\alpha_a) = \mu(a)$.

Si $\mathrm{Res}(\omega, a) = \kappa$, alors

$$F_{s_1(a)} = \kappa \log_{\mathscr{L}} x_{a,1} + G_1 \quad \text{et} \quad F_{s_2(a)} = -\kappa \log_{\mathscr{L}} x_{a_2} + G_2$$

sur Y_a, où $G_1, G_2 \in \mathscr{O}(Y_a)$, et donc $F_{s_2(a)} - F_{s_1(a)} = -\kappa \log_{\mathscr{L}} \alpha_a + G_2 - G_1$, puisque $x_{a,1}x_{a,2} = \alpha_a$. La formule $\log_{\mathscr{L}_2} \alpha_a = \log_{\mathscr{L}_1} \alpha_a + (\mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_1)\mu(a)$ permet de prouver le (i).

Si $((\omega_s)_{s\in S}, (f_a)_{a\in A_c}) = \frac{df}{f}$ est globalement log-exacte, on peut poser $F_s = \log_{\mathscr{L}} f$, pour tout s, ce qui prouve que

$$\alpha_{\mathscr{L}}(\tfrac{df}{f}) = 0,$$

pour tout $\mathscr{L}$, et permet de déduire le (ii) du (i). □

Remarque 8.19. — (i) $H^1_{\mathrm{an}}(Y, \mathbf{C}_p)$ a une Q-structure naturelle fournie par $H^1_{\mathrm{an}}(Y, \mathbf{Q})$ qui coïncide avec la Q-structure naturelle sur $\mathrm{Ker}\,\partial$. De même, $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}}$ a une Q-structure naturelle fournie par les $\log_{\mathscr{L}}$-cobords qui sont localement Q-log-exacts, et cette Q-structure coïncide avec la Q-structure naturelle sur $\mathrm{Ker}\,\partial^*$. La formule définissant N_μ montre que N_μ respecte les Q-structures.

(ii) Pour une formule du même genre, dans le cas propre, cf. Mieda [40].

8.4.7. Cohomologie de de Rham intérieure. — On définit la cohomologie de de Rham intérieure de Z_s comme le sous-groupe

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\mathrm{int}} = \mathrm{Ker}\big[H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s) \to \oplus_{a\in A(s)} H^1_{\mathrm{dR}}(Y_a)\big].$$

Ce groupe s'interprète aussi comme la cohomologie rigide de Y_s^{sp} : on note $Y_s^{\mathrm{sp},\times}$ la courbe Y_s^{sp} munie de la structure logarithmique induite par Y^{sp} et juste Y_s^{sp} la même courbe avec la structure logarithmique triviale. On a alors [28] des isomorphismes

$$H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp},\times}/\mathscr{O}^\times_{\mathbf{C}_p}) \cong \mathbf{C}_p \otimes_{K_0} H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp},\times}/\mathscr{O}^\times_{K_0}), \quad H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp}}/\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \cong \mathbf{C}_p \otimes_{K_0} H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp}}/\mathscr{O}_{K_0}),$$

et le diagramme commutatif suivant dans lequel les lignes sont exactes (la première ligne est juste la suite de Gysin) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp}}/\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) & \to & H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp},\times}/\mathscr{O}^\times_{\mathbf{C}_p}) & \to & \oplus_{a\in A(s)} H^0_{\mathrm{rig}}(P_a/\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) & \to & H^2_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp}}/\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \to 0 \\
 & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
0 & \to & H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\mathrm{int}} & \to & H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \mathbf{C}_p^{A(s)} & \xrightarrow{\partial_s^*} & \mathbf{C}_p^{\{s\}} \to 0
\end{array}$$

(cf. [28] pour le second isomorphisme vertical, le premier est fourni par la commutativité du diagramme).

On a une décomposition :

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s) = H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\mathrm{int}} \oplus H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\log},$$

conséquence directe de l'exactitude de la seconde ligne du diagramme et de l'isomorphisme

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\log} \cong \mathrm{Ker}\big[\partial_s^* : \mathbf{C}_p{}^{A(s)} \to \mathbf{C}_p{}^{\{s\}}\big].$$

Lemme 8.20. — Si Y est un pantalon, et si $f \in \mathscr{O}(Y)^*$ vérifie $\mathrm{Res}\big(\frac{df}{f}\big) = 0$, alors $\frac{df}{f}$ est exacte : il existe $g \in \mathscr{O}(Y)$ tel que $dg = \frac{df}{f}$.

Démonstration. — Découpons Y en un short Y_s et des jambes Y_a, pour $a \in A$. Comme $\mathrm{Res}\big(\frac{df}{f}\big) = 0$, cela signifie que $v_p(f)$ est constante sur chacune des couronnes, et donc le minimum est atteint sur Y_s, et donc $v_p(f)$ est constante. Comme on peut diviser f par une constante, on peut supposer qu'il existe $x_0 \in Y_s(C)$ tel que $f(x_0) = 1$, et alors $v_Z(f) = 0$ sur tout sous-affinoïde Z de Y.

Si $0 < \delta < \inf_a \mu(a)$, et si Y_a est la couronne $0 < v_p(z_a) < \mu(a)$ (recollée à Y_s le long du cercle fantôme en $v_p(z_a) = 0$), on note Y_δ l'affinoïde réunion de Y_s et des couronnes $0 < v_p(a) \leq \mu(a) - \delta$. Alors $d(Y_\delta, \partial Y) \geq \delta$, et donc $v_{Y_\delta}(f-1) \geq \delta$ (prop. 2.9) puisque $x_0 \in Y_\delta$ et $f(x_0) = 1$. Il s'ensuit que la série définissant $\log f$ converge dans $\mathscr{O}(Y_\delta)$ et, ceci étant vrai pour tout δ, que $\log f \in \mathscr{O}(Y)$. On a alors $\frac{df}{f} = d(\log f)$, ce qui permet de conclure. □

La théorie de l'intégration de Coleman fournit un plongement naturel de la cohomologie intérieure des Z_s dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$. Soit $s_0 \in S$, et soit $\omega \in \Omega^1(Z_{s_0})$. Une branche $\log_{\mathscr{L}}$ du logarithme étant fixée, l'intégration de Coleman permet de définir une primitive F_ω de ω sur Z_{s_0}, localement analytique (pour la topologie p-adique, pas pour la rigide), uniquement déterminée à addition près d'une constante. De plus cette intégration est fonctorielle, et si $\omega = df_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ est log-exacte, alors $F_\omega = f_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \log_{\mathscr{L}} f_i$ (à constante près). En particulier, il résulte du lemme 8.20 que ω définit une classe de cohomologie intérieure si et seulement si F_ω est holomorphe sur Y_a, pour tout $a \in A(s_0)$ (dans ce cas F_ω ne dépend pas du choix de $\mathscr{L}$, et ω_s est exacte si et seulement si F_ω est holomorphe sur Y_s).

Ceci permet, si $\omega \in H^1_{\mathrm{dR}}(Z_{s_0})_{\mathrm{int}}$, de définir la classe de ω dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ comme la classe du cocycle $\big((\omega_s),(f_a)\big)$, avec $\omega_{s_0} = \omega$, $\omega_s = 0$ si $s \neq s_0$, $f_a = 0$ si $a \notin A(s_0)$, et $f_a = \pm F_\omega$ suivant que $s_2(a) = s_0$ ou $s_1(a) = s_0$, si $a \in A(s_0)$. Si on change F_ω, cela modifie le cocycle précédent par un cobord, et donc la formule ci-dessus définit une injection naturelle de $H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\mathrm{int}}$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$, pour tout $s \in S$.

Lemme 8.21. — L'injection ci-dessus de $H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\mathrm{int}}$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$, pour tout $s \in S$, s'étend en une injection continue de $\prod_{s\in S} H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\mathrm{int}}$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$.

Démonstration. — Si $(\omega_s)_{s\in S}$ est une collection de formes différentielles dont les classes sont intérieures, la série des cocycles associés converge car elle ne fait intervenir, localement, que des sommes finies, et on obtient ainsi une injection $\prod_{s\in S} H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\mathrm{int}} \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ car les Y_s sont disjoints, et que l'exactitude de ω_s sur Y_s équivaut à l'exactitude de ω_s. □

On définit la cohomologie de de Rham intérieure de Y comme le sous-groupe $\prod_{s\in S} H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\mathrm{int}}$ de $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$.

Proposition 8.22. — (i) $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{int}}$ ne dépend pas du choix de S :

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{int}} = \prod_{s\in\Sigma(Y)} H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\mathrm{int}}.$$

(ii) On a une décomposition naturelle (dépendant de $\mathscr{L}$)

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y) = H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}} \oplus H^1_{\mathrm{an}}(Y,\mathbf{C}_p) \oplus H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{int}}.$$

Démonstration. — Le (i) suit de ce que Y_s^{sp} est de genre 0 si $s \in S \setminus \Sigma(Y)$. Pour prouver le (ii), on utilise l'isomorphisme $H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}} \cong \mathrm{Ker}\,\partial^*$ pour tuer les résidus, puis les classes intérieures pour tuer les ω_s et obtenir un élément de $H^1_{\mathrm{an}}(Y,\mathbf{C}_p)$. □

8.4.8. Fonctorialité. — Soit $u : Y' \to Y$ un morphisme de courbes analytiques sans bord, et soient S et S' des triangulations de Y et Y'. Si $\omega = \big((\omega_s),(f_a)\big) \in Z^1_{\mathrm{dR}}(S)$, on définit $u^*\omega = \big((\omega_{s'}),(f_{a'})\big) \in Z^1_{\mathrm{dR}}(S')$, en posant

$$\omega_{s'} = \begin{cases} u^*\omega_s & \text{si } u(s') \in Z_s \setminus \big(\sqcup_{a\in A_c(s)} Y_a\big), \\ u^*\omega_{s_1(a)} & \text{si } u(s') \in Y_a \text{ et } a \in A_c. \end{cases}$$

$$f_{a'} = \begin{cases} -u^*f_a & \text{si } u(Y_{a'}) \subset Y_a,\, u(s_1(a')) = s_2(a) \text{ et } u(s_2(a')) \neq s_2(a), \\ u^*f_a & \text{si } u(Y_{a'}) \subset Y_a,\, u(s_2(a')) = s_2(a) \text{ et } u(s_1(a')) \neq s_2(a), \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Alors $u^*\omega$ est un cobord si ω en est un et $u^* : H^1_{\mathrm{dR}}(Y) \to H^1_{\mathrm{dR}}(Y')$ est l'application induite.

Il est alors immédiat que :

$$u^*(H^1_{\mathrm{an}}(Y,\mathbf{Q})) \subset H^1_{\mathrm{an}}(Y',\mathbf{Q}) \quad \text{et} \quad u^*(H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}}) \subset H^1_{\mathrm{dR}}(Y')_{\log,\mathscr{L}},$$

et la fonctorialité de l'intégration de Coleman fournit l'inclusion

$$u^*(H^1_{\mathrm{dR}}(Z)_{\mathrm{int}}) \subset H^1_{\mathrm{dR}}(Z')_{\mathrm{int}}.$$

On en déduit la fonctorialité la décomposition

$$H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log} = H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\mathrm{int}} \oplus H^1_{\mathrm{an}}(Y,\mathbf{C}_p) \oplus H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}}.$$

8.4.9. Cohomologie de Hyodo-Kato. — Ce résultat permet de décrire directement l'isomorphisme de Hyodo-Kato : on définit $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)$ comme le $\breve{\mathbf{C}}_p$-espace vectoriel

$$\big(\textstyle\prod_{s\in\Sigma} H^1_{\mathrm{rig}}(Y_s^{\mathrm{sp}}/\mathscr{O}_{\breve{\mathbf{C}}_p})\big) \bigoplus H^1(\Gamma,\breve{\mathbf{C}}_p) \bigoplus H^1_c(\Gamma,\breve{\mathbf{C}}_p)^*(-1).$$

que l'on munit :

- du frobenius naturel φ sur chacun des facteurs,
- de l'opérateur de monodromie N de la rem. 1.6,
- de l'isomorphisme $\iota_{\mathrm{HK},\mathscr{L}} : K \otimes H^1_{\mathrm{HK}}(Y) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y)$ (qui dépend du choix de $\mathscr{L}$),

somme directe des isomorphismes

$$K \otimes H^1(\Gamma(\mathscr{Y}),\breve{\mathbf{C}}_p) \cong H^1_{\mathrm{an}}(Y,K), \quad K \otimes H^1_c(\Gamma(\mathscr{Y}),\breve{\mathbf{C}}_p)^* \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y)_{\log,\mathscr{L}},$$
$$K \otimes H^1_{\mathrm{rig}}(\mathscr{Y}_s/\mathscr{O}_{\breve{\mathbf{C}}_p}) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Z_s)_{\mathrm{int}}.$$

Remarque 8.23. — (i) L'isomorphisme ι_{HK} du (iii) de la rem. 8.2 correspond à $\iota_{\mathrm{HK},\mathscr{L}}$ pour $\mathscr{L}=0$.

(ii) Les fonctorialités de la décomposition de la cohomologie de de Rham et de la cohomologie rigide impliquent que $Y \mapsto (H^1_{\mathrm{HK}}(Y), H^1_{\mathrm{dR}}(Y), \iota_{\mathrm{HK},\mathscr{L}})$ est fonctoriel.

(iii) La définition de $H^1_{\mathrm{HK}}(Y)$ en fournit une décomposition naturelle qui n'est autre que la décomposition par les poids de frobenius : $H^1_{\mathrm{rig}}(\mathscr{Y}_s/\mathscr{O}_{\breve{\mathrm{C}}_p})$ est le sous-espace de poids 1, $H^1(\Gamma(\mathscr{Y}),K_0)$ celui de poids 0 et $H^1_c(\Gamma(\mathscr{Y}),K_0)^*(-1)$ celui de poids 2.

Appendice A
Plaidoyer pour un peu de modération

Dans cet appendice, on étudie les pathologies de la cohomologie étale de la boule unité ouverte, et on propose une piste pour les supprimer.

Soit $\mathring{B}$ la boule unité ouverte (i.e. $\mathscr{O}(\mathring{B})=\mathscr{O}_C[[T]]$). On a défini au n° 4.2.1 le complexe $\mathrm{Syn}(\mathring{B},1)$ et calculé ses groupes de cohomologie $H^i_{\mathrm{syn}}(\mathring{B},1)$ (prop. 4.6). On va s'intéresser au lien entre les $H^i_{\mathrm{syn}}(\mathring{B},1)$ et la cohohomologie étale (à coefficients dans $\mathrm{Z}_p(1)$) de la fibre générique[53] $\mathring{B}^{\mathrm{an}}$ de $\mathring{B}$ (c'est l'espace rigide associé : si r_n est une suite de rationnels vérifiant $r_n > r_{n+1}$ et $\lim r_n = 0$, alors $\mathring{B}^{\mathrm{an}}$ est la réunion croissante des $B^{\mathrm{an}}_{r_n}$, où B^{an}_r est la fibre générique de la boule fermée $B_r=\{v_p(T)\geq r\}$, i.e. $\mathscr{O}(B_r)=\mathscr{O}_C\langle\frac{T}{p^r}\rangle$). Notons que les résultats qui suivent s'étendent verbatim aux couronnes ouvertes : pour toutes ces histoires, une couronne ouverte se comporte comme la réunion de deux boules ouvertes attachées en un point.

Si $r\in\mathrm{Q}$, on pose $\mathscr{O}(\widetilde{B}_r)=\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\langle\frac{T}{\tilde{p}^r}\rangle$. On a donc $\Omega^1(\widetilde{B}_r)=\mathscr{O}(\widetilde{B}_r)\frac{dT}{\tilde{p}^r}$. On dispose du complexe

$$\mathrm{Syn}(B_r,1) := \ F^1\mathscr{O}(\widetilde{B}_r) \xrightarrow{(d,1-\frac{\varphi}{p})} \Omega^1(\widetilde{B}_r)\oplus\mathscr{O}(\widetilde{B}_r) \xrightarrow{(1-\frac{\varphi}{p})-d} \Omega^1(\widetilde{B}_r)\ ,$$

où $\varphi(T)=T^p$. Ce complexe calcule la cohomologie étale de la fibre générique de B_r : c'est clair pour H^0 ; pour H^1, c'est un cas particulier du cor. 6.25 (ou du th. 5.34, via le le cor. 5.5) ; pour H^2, cela découle de ce que $H^2_{\mathrm{syn}}(B_r,1)=0$ (prop. 4.7) et de ce que $H^2(B^{\mathrm{an}}_r,\mathrm{Z}_p(1))=0$, d'après Berkovich [4, cor. 6.1.3].

A.1. Groupe de Picard. — Comme $C\langle\frac{T}{p^r}\rangle$ est, pour tout $r\in\mathrm{Q}$, un anneau principal, on a

$$\mathrm{Pic}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}) = \frac{\{(f_n)_{n\in\mathrm{N}},\ f_n\in\mathscr{O}(B_{r_n})^*\}}{\{(g_{n+1}g_n^{-1})_{n\in\mathrm{N}},\ g_n\in\mathscr{O}(B_{r_n})^*\}}$$

De plus, on peut remplacer $\mathscr{O}(B_{r_n})^*$ par son sous-groupe des f valant 1 en 0, et tous les f_n, g_n, etc. qui vont intervenir vérifient cette propriété.

53. Comme nous l'expliquons au § A.4, il y a plusieurs objets différents qui peuvent prétendre être la fibre générique de $\mathring{B}$. Dans le texte principal, nous avons juste défini $\mathscr{O}(\mathring{B}^{\mathrm{gen}})$ sans spécifier dans quelle catégorie $\mathring{B}^{\mathrm{gen}}$ vivait.

A.1.1. Le théorème de Lazard. — Rappelons le résultat fondamental de Lazard [36] concernant le groupe $\mathrm{Pic}(\mathring{B}^{\mathrm{an}})$.

Proposition A.1. — (Lazard) On a la dichotomie suivante :
- Si C est sphériquement complet, alors $\mathrm{Pic}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}) = 0$.
- Si C n'est pas sphériquement complet, alors $\mathrm{Pic}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}) \neq 0$.

Nous allons avoir besoin de préciser ce qui se passe dans le cas non sphériquement complet. Les résultats suivants sont des variations sur [36, § V, prop. 6].

A.1.2. Construction d'éléments non divisibles. — Comme C n'est pas sphériquement complet, il existe des suites $(D_n)_{n\in\mathrm{N}}$ strictement décroissantes de boules fermées, dont la valuation $-r_n$ tend vers 0, et telles que $\cap_n D_n = \varnothing$. On choisit une telle suite et $x_n \in D_n$ pour tout n, puis $a_n \in D_n \setminus D_{n+1}$ vérifiant $v_p(a_n - x_{n+1}) > -r_n$; on a alors $D_n = B(a_n, -r_n)$ et

$$-r_{n+1} > v_p(a_{n+1}-a_n) > -r_n > v_p(a_n-a_{n-1})\cdots, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0, \quad \cap_n B(a_n,-r_n) = \varnothing$$

Soit $u_n = 1 - (a_n - a_{n-1})T$. Comme $v_p(a_n - a_{n-1}) > -r_n$, on a $u_n \in \mathscr{O}(B_{r_n})^*$.

Proposition A.2. — La classe de $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ dans $\mathrm{Pic}(\mathring{B}^{\mathrm{an}})$ n'est pas divisible par p et, plus généralement, celle de $(u_n^{p^k})_{n\in\mathrm{N}}$ n'est pas divisible par p^{k+1}.

Démonstration. — Suppons que cette classe est divisible par p. Il existe alors $v_n, g_n \in \mathscr{O}(B_{r_n})^*$, tels que $u_n = \frac{v_{n+1}}{v_n} g_n^p$, pour tout $n \in \mathrm{N}$. Quitte à diviser g_n, v_n par des constantes, on peut supposer que

$$g_n = 1 + \alpha_n T + \cdots, \quad v_n = 1 + \nu_n T + \cdots,$$

et l'hypothèse d'inversibilité implique

$$v_p(\alpha_n) > -r_n, \quad v_p(\nu_n) > -r_n.$$

Soit $w_n = (1 - (a_1 - a_0)T)\cdots(1 - (a_{n-1} - a_{n-2})T)$. On a $u_n = \frac{w_{n+1}}{w_n}$ sur B_{r_n}. On en déduit que

$$\frac{w_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{w_n}{v_n} g_n^p.$$

Si $\frac{w_n}{v_n} = 1 + \beta_n T + \cdots$, la relation précédente implique

$$\beta_{n+1} = \beta_n + p\alpha_n, \quad \text{et donc } \beta_n - \beta_0 \in p^{1-r_0}\mathscr{O}_C, \text{ pour tout } n.$$

Maintenant, on a $\beta_n = a_0 - a_n - \nu_n$, et donc

$$a_0 - \beta_0 = a_n + \nu_n + (\beta_n - \beta_0) \in B(a_n, -r_n), \quad \text{pour tout } n.$$

On en déduit que $a_0 - \beta_0 \in \cap_n B(a_n, -r_n)$, ce qui conduit à une contradiction puisque cette intersection est vide par hypothèse. Cela prouve que cette classe n'est pas divisible par p.

Le cas k général se traite de la même manière : il suffit d'élever tout à la puissance p^k, ce qui multiplie les coefficients de T par p^k. □

A.1.3. Le sous-groupe de torsion du groupe de Picard. — Le but de ce numéro est de prouver le résultat suivant.

Proposition A.3. — Le groupe $\mathrm{Pic}(\mathring{B})$ est sans torsion.

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\mathrm{Pic}(\mathring{B})$ n'a pas de p-torsion. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \prod_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{O}(B_{r_n})^*$, on note $[(u_n)]$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(\mathring{B})$. On pose $T_n = T/p^{r_n}$, et donc $T_{n+k} = p^{r_n - r_{n+k}} T_n$. Alors $\mathscr{O}(B_{r_n}) = \mathscr{O}_C\langle T_n\rangle$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme A.4. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \prod_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{O}(B_{r_n})^*$. S'il existe $\delta > 0$ tel que $u_n \in 1 + p^\delta T_n \mathscr{O}(B_{r_n})$ pour tout n assez grand, alors $[(u_n)] = 0$.

Démonstration. — On peut écrire $u_n = \prod_{k\geq 1} u_{n,k}$, avec $u_{n,k} = 1 + p^\delta a_{n,k} T_n^k$ et $a_{n,k} \in \mathscr{O}_C$ tend vers 0 quand $k \to \infty$ (n étant fixé) : l'existence des $a_{n,k} \in \mathscr{O}_C$ est immédiate et pour prouver que $a_{n,k} \to 0$, il suffit de développer, de regarder modulo $p^{2\delta}$, $p^{3\delta}$, etc., et d'utiliser le fait que u_n est un polynôme modulo $p^{2\delta}$, $p^{3\delta}$, etc.

On choisit N_k tel que $\delta - kr_n \geq 0$ si $n \geq N_k$. On définit $v_{n,k}$ par $v_{n,k} = 1$ si $n = N_k$ et $v_{n+1,k} = u_{n,k} v_{n,k}$, si $n \in \mathbf{N}$. De manière explicite, on a

$$v_{n,k} = \begin{cases} \prod_{i=N_k}^{n-1} (1 + p^\delta a_{i,k} p^{-kr_i} T^k) & \text{si } n \geq N_k, \\ \prod_{i=n}^{N_k-1} (1 + p^\delta a_{i,k} p^{k(r_n - r_i)} T_n^k)^{-1} & \text{si } n \leq N_k - 1. \end{cases}$$

Comme $a_{n,k} \to 0$ quand $k \to \infty$, on voit que, si $0 < \delta' < \delta$, alors $v_{n,k} \in 1 + p^{\delta'} T_n \mathscr{O}(B_{r_n})$, pour tout k (on a même $v_{n,k} \in 1 + p^\delta T \mathscr{O}_C[[T]]$ si $N_k \leq n$), et que $v_{n,k} - 1 \to 0$ dans $p^{\delta'} T_n \mathscr{O}(B_{r_n})$ quand $k \to +\infty$. Il s'ensuit que $v_n = \prod_{k\geq 1} v_{n,k} \in \mathscr{O}(B_{r_n})^*$, et comme on a $u_n = \prod u_{n,k} = \prod (v_{n+1,k}/v_{n,k}) = v_{n+1}/v_n$, cela permet de conclure. □

Revenons à la preuve de la prop. A.3. On suppose que $[(u_n^p)] = 0$ et on veut en déduire que $[(u_n)] = 0$.

Écrivons $u_n = 1 + \sum_{k\geq 1} a_{n,k} T_n^k$ et posons $u_n^{(p)} = 1 + \sum_{k\geq 1} a_{n,k}^p T_n^{pk}$. Alors $u_n^{(p)}/u_n^p \in 1 + pT_n\mathscr{O}(B_{r_n})$, pour tout n, et il résulte du lemme A.4 que $[u_n^{(p)}] = 0$ puisque $[(u_n^p)] = 0$. On peut donc écrire $u_n^{(p)} = w_{n+1}/w_n$ pour tout n, avec $w_n \in \mathscr{O}(B_{r_n})^*$. De plus, comme les seules puissances de T intervenant dans $u_n^{(p)}$ sont les T^{pk}, on peut éliminer les puissances de T premières à p dans les w_n une par une (on commence par T en remarquant que le coefficient a_1 de T dans w_n ne dépend pas de n, ce qui permet de diviser w_n par $1 + a_1 T$ pour tout n, et on recommence avec T^2, etc.). On a alors $w_n = 1 + \sum_{k\geq 1} w_{n,k} T_n^{pk}$.

Soit $w'_{n,k} = (w_{n,k})^{1/p}$ (pour un choix de racine p-ième), et soit $w'_n = 1 + \sum_{k\geq 1} w'_{n,k} T_n^k \in 1 + T_n\mathscr{O}(B_{r_n})$. Alors $(u_n (w'_{n+1}/w'_n)^{-1})^p \in 1 + pT_n\mathscr{O}(B_{r_n})$ car $(w'_n)^p/w_n \in 1 + pT_n\mathscr{O}(B_{r_n})$ et $u_n^p/u_n^{(p)} \in 1 + pT_n\mathscr{O}(B_{r_n})$. Il en résulte que $u_n(w'_{n+1}/w'_n)^{-1} \in 1 + p^{1/p} T_n \mathscr{O}(B_{r_n})$, et le lemme A.4 fournit une suite de $v'_n \in \mathscr{O}(B_{r_n})^*$ tels que $u_n(w'_{n+1}/w'_n)^{-1} = v'_{n+1}/v'_n$. Si on pose alors $v_n = v'_n w'_n$, on a $v_n \in \mathscr{O}(B_{r_n})^*$ et $u_n = v_{n+1}/v_n$ pour tout n. On en déduit que $[(u_n)] = 0$, ce que l'on voulait. □

A.2. Cohomologie étale. — On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Z}/p^n \otimes \mathscr{O}(\mathring{B}^{\mathrm{an}})^* \to H^1_{\text{ét}}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}, \mathrm{Z}/p^n(1)) \to \mathrm{Pic}(\mathring{B}^{\mathrm{an}})[p^n] \to 0.$$

Comme $\mathscr{O}(\mathring{B}^{\mathrm{an}})^* = C^* \times (1 + \mathscr{O}_C[[T]])$ et que $\mathrm{Z}/p^n \otimes C^* = 0$, on déduit des prop. A.1 et A.3 le résultat suivant (le cas de Z_p se déduit du cas de Z/p^n en passant à la limite puisque $1 + \mathscr{O}_C[[T]]$ est séparé et complet pour la topologie p-adique).

Corollaire A.5. — On a des isomorphismes :

$$H^1_{\text{ét}}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}, \mathrm{Z}/p^n(1)) \cong \mathrm{Z}/p^n \otimes (1 + \mathscr{O}_C[[T]]), \quad \text{si } n \geq 1,$$
$$H^1_{\text{ét}}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}, \mathrm{Z}_p(1)) \cong 1 + T\mathscr{O}_C[[T]].$$

Comme $H^2_{\text{ét}}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}, \mathrm{Z}_p(1))$ est le complété p-adique de $\mathrm{Pic}(\mathring{B}^{\mathrm{an}})$, on déduit de la prop. A.2 le résultat suivant.

Théorème A.6. — On a la dichotomie suivante :
- Si C est sphériquement complet, $H^2_{\text{ét}}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}, \mathrm{Z}_p(1)) = 0$.
- Si C n'est pas sphériquement complet, $H^2_{\text{ét}}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}, \mathrm{Z}_p(1)) \neq 0$ et n'a pas de torsion.

Remarque A.7. — Supposons C non sphériquement complet.

(i) En utilisant les exemples de la prop. A.2, on peut montrer que $H^2_{\text{ét}}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}, \mathrm{Z}_p(1))$ est, non seulement non nul, mais énorme.

(ii) Comme $H^2_{\text{ét}}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}, \mathrm{Q}_p(1)) \neq 0$, cela fournit un exemple de non injectivité de l'application naturelle de la cohomologie étale vers la proétale puisque $H^2_{\text{proet}}(\mathring{B}^{\mathrm{an}}, \mathrm{Q}_p(1)) = 0$ (cf. [18, 16]).

A.3. Cohomologie syntomique et cohomologie du groupe fondamental

On remarque, en comparant les résultat du § A.2 avec ceux de la prop. 4.6, que $\mathrm{Syn}(\mathring{B}, 1)$ calcule la cohomologie étale de $\mathring{B}^{\mathrm{an}}$ si C est sphériquement complet mais pas si C n'est pas sphériquement complet. Une explication est la suivante : dans tous les cas, le complexe total associé au complexe double

$$\begin{array}{ccccc}
\prod_{n\in\mathrm{N}} F^1\mathscr{O}(\widetilde{B}_{r_n}) & \xrightarrow{(d,1-\frac{\varphi}{p})} & \prod_{n\in\mathrm{N}} \Omega^1(\widetilde{B}_{r_n}) \oplus \prod_{n\in\mathrm{N}} \mathscr{O}(\widetilde{B}_{r_n}) & \xrightarrow{(1-\frac{\varphi}{p})-d} & \prod_{n\in\mathrm{N}} \Omega^1(\widetilde{B}_{r_n}) \\
\downarrow & & \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\
\prod_{n\in\mathrm{N}} F^1\mathscr{O}(\widetilde{B}_{r_n}) & \xrightarrow{(d,1-\frac{\varphi}{p})} & \prod_{n\in\mathrm{N}} \Omega^1(\widetilde{B}_{r_n}) \oplus \prod_{n\in\mathrm{N}} \mathscr{O}(\widetilde{B}_{r_n}) & \xrightarrow{(1-\frac{\varphi}{p})-d} & \prod_{n\in\mathrm{N}} \Omega^1(\widetilde{B}_{r_n})
\end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont $(x_n)_{n\in\mathrm{N}} \mapsto (x_n - x_{n+1})_{n\in\mathrm{N}}$, calcule la cohomologie étale de $\mathring{B}^{\mathrm{an}}$ puisque les $B^{\mathrm{an}}_{r_n}$ forment un recouvrement croissant de $\mathring{B}^{\mathrm{an}}$.

- Si C est sphériquement complet, on a $\mathrm{R}^1 \lim_n p^{-s_n}\mathscr{O}_C = 0$, pour toute suite strictement décroissante $(s_n)_{n\in\mathrm{N}}$ de nombres rationnels. On en déduit des résultats analogues pour $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, $F^1\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, etc. La nullité des R^1 lim ci-dessus implique que les flèches verticales sont surjectives ;

on peut donc remplacer le double complexe par le complexe des noyaux des flèches verticales qui n'est autre que $\mathrm{Syn}(\mathring{B},1)$.

• Si C n'est pas sphériquement complet, les flèches verticales ne sont pas surjectives, et on ne peut pas remplacer le double complexe par $\mathrm{Syn}(\mathring{B},1)$.

Il y a donc une dichotomie un peu désagréable mais, comme nous allons le voir, $\mathrm{Syn}(\mathring{B},1)$ calcule dans tous les cas la cohomologie continue du groupe fondamental de $\mathring{B}^{\mathrm{an}}$.

Soit $R=\mathscr{O}_C[[T]]$, et soient $\overline{R}$ la côture intégrale de R dans l'extension profinie étale maximale de $R[\frac{1}{p}]$ et $G_R=\mathrm{Aut}(\overline{R}/R)$.

Proposition A.8. — Le complexe $\mathrm{Syn}(\mathring{B},1)$ calcule la cohomologie continue de G_R à valeurs dans Z_p (ou $\mathrm{Z}_p(1)$, puisque C est algébriquement clos).

Démonstration. — On note R_∞ la sous-R-algèbre $R[(1+T)^{p^{-\infty}}]$ de $\overline{R}$, et $\widehat{R}_\infty$ son complété pour la topologie (p,T)-adique. Alors $\Gamma=\mathrm{Aut}(R_\infty/R)\cong\mathrm{Z}_p$ (on choisit un générateur topologique γ de Γ), et $\widehat{R}_\infty$ est perfectoïde. On en déduit que la cohomologie de G_R est calculée par le complexe

$$\widetilde{R}\xrightarrow{(1-\gamma,1-\varphi)}\widetilde{R}\oplus\widetilde{R}\xrightarrow{(1-\varphi)-(1-\gamma)}\widetilde{R}$$

où $\mathrm{A}_C=W(C^\flat)$, $\mathrm{A}_C^+=W(\mathscr{O}_{C^\flat})$ et $\widetilde{R}=\mathrm{A}_C\otimes_{\mathrm{A}_C^+}\mathrm{A}_C^+[[T]]$, les actions de γ et φ sur $\widetilde{R}$ étant données par $\gamma(T)=(1+\pi)T+\pi$, où $\pi=[\varepsilon]-1$ et $\varphi(T)=(1+T)^p-1$. (Pour aboutir à cette expression au lieu de $\widetilde{R}_\infty=W(\widehat{R}_\infty[\frac{1}{p}]^\flat)$, il faut utiliser l'inverse à gauche $\psi:\widetilde{R}\to\widetilde{R}$ de φ donné par $\psi(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i))=x_0$, et le fait que $\gamma-1$ est inversible sur $\widetilde{R}^{\psi=0}$; cela permet de décompléter comme d'habitude.)

Ensuite, on vérifie que le complexe ci-dessus est quasi-isomorphe à

$$\tfrac{1}{\varphi^{-1}(\pi)}\widetilde{R}^+\xrightarrow{(1-\gamma,1-\varphi)}\widetilde{R}^+\oplus\tfrac{1}{\pi}\widetilde{R}^+\xrightarrow{(1-\varphi)-(1-\gamma)}\widetilde{R}^+\ ,$$

où $\widetilde{R}=\mathrm{A}_C^+[[T]]$ (c'est comme d'habitude, utiliser le complexe avec ψ au lieu de φ et le fait que $\widetilde{R}^{\psi=1}=(\widetilde{R}^+)^{\psi=1}$ et le fait qu'une solution $y\in\widetilde{R}^{\psi=0}$ de $(\gamma-1)y=x$ appartient à $(\frac{1}{\pi}\widetilde{R}^+)^{\psi=0}$ si $x\in(\widetilde{R}^+)^{\psi=0}$). On plonge $\frac{1}{\varphi^{-1}(\pi)}\widetilde{R}^+$ et $\frac{1}{\pi}\widetilde{R}^+$ dans $F^1\widetilde{R}^+$ et $\widetilde{R}^+$ par $x\mapsto\pi x$, puis on plonge $F^1\widetilde{R}^+$ et $\widetilde{R}^+$ dans $F^1\mathscr{O}(\widetilde{B})$ et $\mathscr{O}(\widetilde{B})$ (il faut vérifier que ceci induit un quasi-isomorphisme). Enfin, on remarque que $\frac{\gamma-1}{\pi}=\partial$ modulo π, ce qui permet de passer du complexe obtenu à $\mathrm{Syn}(B,1)$ comme dans [17], [27]. □

A.4. La fibre générique adoque. — Il résulte de la prop. A.8 et du § A.3 que, si C est sphériquement complet, la cohomologie étale de $\mathring{B}^{\mathrm{an}}$ est celle de son groupe fondamental (i.e. $\mathring{B}^{\mathrm{an}}$ est un $K(\pi,1)$), alors que si C n'est pas sphériquement complet, ce n'est pas du tout le cas. On peut s'extasier devant la richesse du monde p-adique ou considérer que c'est une pathologie dont on aimerait se débarrasser.

On peut penser que le problème vient de ce que l'on n'a pas pris la bonne fibre générique et que, pour restaurer un peu d'harmonie, il faudrait la remplacer par la fibre générique adoque dont nous allons esquisser une définition possible.

Soit Y un affinoïde sur C. On retrouve la topologie rigide sur Y en prenant comme base d'ouverts les images inverses (i.e. les tubes) des ouverts de modèles de Y sur $\mathscr{O}_C$. Si U est un ouvert d'un tel modèle $\mathscr{Y}$, on a $\mathscr{O}_Y(]U[) = \mathscr{O}_{\mathscr{Y}}(U)[\frac{1}{p}]$.

On peut enrichir cette structure, en définissant Y^{ado} comme l'ensemble des points de l'espace adique associé à Y se spécialisant en un point de $\mathscr{Y}^{\text{ado}}$ pour un choix de modèle assez fin de Y (on n'obtient ainsi que des valuations de rang 1 ou 2 induisant v_p sur C), et en prenant comme base d'ouverts de Y^{ado} les images inverses (i.e. les tubes) des ouverts des schémas adoques associés aux modèles de Y sur $\mathscr{O}_C$. Si U est un ouvert adoque d'un tel modèle $\mathscr{Y}$, on pose $\mathscr{O}_{Y^{\text{ado}}}(]U[) = \mathscr{O}_{\mathscr{Y}^{\text{ado}}}(U)[\frac{1}{p}]$; la fibre générique de U est l'espace annelé image inverse de U dans Y^{ado}.

Une variété adoque est alors un espace annelé, localement isomorphe à un ouvert de Y^{ado}, où Y est un affinoïde sur C.

Si Y est un schéma adoque obtenue en recollant les U_i le long des $U_{i,j}$, sa fibre générique Y^{gen} est la variété adoque obtenue en recollant les fibres génériques des U_i le long des des fibres génériques des $U_{i,j}$. En particulier, si Y est un affinoïde, Y^{ado} est la fibre générique de n'importe lequel de ses modèles.

Remarque A.9. — (i) Soit $\mathring{B}^{\text{ado}}$ la boule unité ouverte vue comme variété adoque. Alors $\mathscr{O}(\mathring{B}^{\text{ado}}) = \mathscr{O}_C[[T]][\frac{1}{p}]$. Si on considère à la place la boule unité rigide $\mathring{B}^{\text{an}}$, alors $\mathscr{O}(\mathring{B}^{\text{an}}) = \mathscr{R}^+$, anneau des $\sum_{n\geq 0} a_n T^n$, avec $a_n \in C$ et $v_p(a_n) + nr \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, pour tout $r > 0$. Remarquons que $\mathring{B}^{\text{an}}$ peut aussi être considérée comme variété adoque, réunion des boules fermées B_{r_n}, et on a une injection $\mathring{B}^{\text{an}} \hookrightarrow \mathring{B}^{\text{ado}}$ (correspondant à l'injection naturelle $\mathscr{O}(\mathring{B}^{\text{ado}}) \to \mathscr{O}(\mathring{B}^{\text{an}})$), mais cette injection n'est pas un isomorphisme : le cercle fantôme à la frontière de $\mathring{B}^{\text{ado}}$ n'appartient pas à $\mathring{B}^{\text{an}}$ car il n'appartient à aucune des B_{r_n}.

(ii) $\mathring{B}^{\text{ado}}$ est quasi-compacte contrairement à $\mathring{B}^{\text{an}}$ car un voisinage du cercle fantôme à la frontière doit contenir un domaine rationnel non trivial, et on peut donc extraire de tout recouvrement ouvert un recouvrement fini. Cela signifie que l'on n'a pas de problème de R^1 lim, et donc que

$$\mathrm{Pic}(\mathring{B}^{\text{ado}}) = 0.$$

On en déduit que $\mathrm{Syn}(\mathring{B}, 1)$ calcule la cohomologie étale de $\mathring{B}^{\text{ado}}$ indépendamment du fait que C soit ou ne soit pas sphériquement complet.

(iii) Ce résultat laisse espérer que les (fibres génériques d') affines adoques soient des $K(\pi, 1)$ comme le sont les affinoïdes d'après Scholze [43, th. 1.2]. Si tel n'est pas le cas, on pourrait envisager de changer la définition de la cohomologie proétale pour l'imposer...

Références

[1] F. Baldassarri, Continuity of the radius of convergence of differential equations on p-adic analytic curves, Invent. Math. 182 (2010), 513–584.

[2] B. Bhatt, P. Scholze, Prisms and prismatic cohomology, Ann. of Maths (à paraître).

[3] M. Baker, S. Payne et J. Rabinoff, Nonarchimedean geometry, tropicalization, and metrics on curves, Algebr. Geom. 3 (2016), 63–105.

[4] V. Berkovich, Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, Publ. IHES. 78 (1993), 5–161.

[5] H. Carayol, Non-abelian Lubin-Tate theory, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, volume II, 15–39. Academic Press, 1990.

[6] R. Coleman, Reciprocity laws on curves, Compositio Math. 72, (1989), 205–235.

[7] R. Coleman, The monodromy pairing, Asian J. Math. 4, (2000), 315–330.

[8] R. Coleman, Torsion points on curves and p-adic Abelian integrals, Ann. of Maths 121 (1985), 111–168.

[9] R. Coleman, E. de Shalit, p-adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions, Invent. Math. 93 (1988), 239–266.

[10] R. Coleman, A. Iovita, The Frobenius and monodromy operators for curves and abelian varieties, Duke Math. J. 97 (1999), 171–215.

[11] P. Colmez, Périodes p-adiques des variétés abéliennes, Math. Ann. 292 (1992), 629–644.

[12] P. Colmez, Intégration sur les variétés p-adiques, Astérisque 248 (1998).

[13] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), 331–439.

[14] P. Colmez, La courbe de Fargues-Fontaine, Astérisque 406 (2018), 1–50.

[15] P. Colmez, G. Dospinescu, W. Nizioł, Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld, le cas de la dimension 1, J. AMS 33 (2020), 311–362.

[16] P. Colmez, G. Dospinescu, W. Nizioł, Cohomology of p-adic Stein spaces, Invent. Math. 219 (2020), 873–985.

[17] P. Colmez, W. Nizioł, Syntomic complexes and p-adic nearby cycles, Invent. Math. 208 (2017) 1–108.

[18] P. Colmez, W. Nizioł, On the cohomology of the affine space, p-adic Hodge Theory, p. 71–80, Simons Symp., Springer-Verlag 2020.

[19] A. Ducros, Triangulations et cohomologie étale sur une courbe analytique p-adique, J. Algebraic Geom. 17 (2008), 503–575.

[20] A. Ducros, La structure des courbes analytiques, Livre en préparation.

[21] G. Faltings, A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld, Algebraic number theory and algebraic geometry, Contemp. Math. 300 (2002), 115-129.

[22] L. Fargues et J.-M. Fontaine, Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique, Astérisque 406 (2018), 51–382.

[23] J.-M. Fontaine, Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables, Astérisque 223 (1994), 321–347.

[24] J. Fresnel, M. van der Put, Rigid analytic geometry and its applications, Progress in Math. 218, Birkhäuser 1981.

[25] J. Fresnel, M. Matignon, Sur les espaces analytiques quasi-compacts de dimension 1 sur un corps valué complet ultramétrique, Ann. Mat. Pura Appl. 145, (1986) 159–210.

[26] L. Gerritzen, Zerlegungen der Picard-Gruppe nichtarchimedischer holomorpher Räume, Compositio Math. 35 (1977), 23–38.

[27] S. Gilles, Morphismes de périodes et cohomologie syntomique, Algebra & Number Theory (à paraître).

[28] E. Grosse-Klonne, Frobenius and monodromy operators in rigid analysis, and Drinfeld's symmetric space, J. Algebraic Geom. 14 (2005), 391–437.

[29] D. Harbater, Formal patching and adding branch points, Amer. J. of Math. 115, (1993), 487–508.

[30] U. Hartl, Semi-stable models for rigid-analytic spaces, Manuscripta Math. 110 (2003), 365–380.

[31] E. Heinrich, M. van der Put, Über die Picardgruppen affinoider Algebren, Math. Z. 186 (1984), 9–28.

[32] L. Illusie, Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, Ann. ENS 12 (1979), 501–661.

[33] L. Illusie, Sur la formule de Picard–Lefschetz, Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), p. 249–268, Adv. Stud. Pure Math. 36, Math. Soc. Jpn. 2002.

[34] K. Kato, Semistable reduction and p-adic étale cohomology, Astérisque 223 (1994), 269–293.

[35] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. 153 (2003), 373–454.

[36] M. Lazard, Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet, Publ. IHES 14 (1962), 47–75.

[37] Q. Liu, Ouverts analytiques d'une courbe projective sur un corps valué complet, ultramétrique, algébriquement clos, disponible à `https://www.math.u-bordeaux.fr/~qliu/articles/thesis_QL.pdf`

[38] Q. Liu, M. van der Put, On one-dimensional separated rigid spaces, Indag. Math. 6 (1995), 439–451.

[39] W. Lutkebohmert, Rigid geometry of curves and their Jacobians, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 61, Springer-Verlag, 2016.

[40] Y. Mieda, The Picard-Lefschetz formula for p-adic cohomology, Math. Z. 257 (2007), 403–425.

[41] T. Ochiai, ℓ-independance of the trace of monodromy, Math. Ann. 315 (1999), 321–340.

[42] M. Raynaud, Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar, Invent. Math. 116 (1994), 425–462.

[43] P. Scholze, p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties, Forum Math. Pi 1 (2013), e1, 77 pp.

[44] P. Scholze, J. Weinstein, Moduli of p-divisible groups, Cambridge J. of Math. 1 (2013), 145–237.

[45] M. Temkin, Introduction to Berkovich analytic spaces, Berkovich spaces and applications, Springer Lecture Notes in Math. 2119 (2015), 3–66.

[46] M. Temkin, Altered local uniformization of Berkovich spaces, Israel J. Math. 221 (2017), 585–603.

[47] T. Tsuji, p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, Invent. Math. 137 (1999), 233-411.

[48] M. van der Put, The class group of a one-dimensional affinoid space. Ann. Inst. Fourier 30 (1980), 155–164.

[49] J. Weinstein, Semistable models for modular curves of arbitrary level, Invent. Math. 205 (2016), 459–526.

Pierre Colmez, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr

Gabriel Dospinescu, CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France
E-mail : gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr

Wiesława Nizioł, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : wieslawa.niziol@imj-prg.fr